

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Note sur la théorie des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 4 (1839), p. 7-8.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4_7_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4_7_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

Sur la Théorie des Nombres ;

PAR E. CATALAN.

I.

THÉORÈME. « N étant un nombre entier quelconque, dont les diviseurs sont $d, d', d'', \dots$, et $\varphi(n)$ désignant généralement le nombre des facteurs premiers avec n , et plus petits que n , on a

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \dots = N. »$$

Démonstration (*). Soit $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$, $a, b, c, \dots$ désignant les facteurs premiers de N. En appelant d un quelconque des diviseurs de N, on pourra le représenter par $a^i b^k c^l \dots$, expression dans laquelle les exposants $i, k, l, \dots$ peuvent varier respectivement de 0 à α , de 0 à β , de 0 à γ , etc. Par une formule connue,

$$\varphi(d) = d \cdot \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdot \frac{c-1}{c} \dots = a^{i-1}(a-1) \times b^{k-1}(b-1) \times c^{l-1}(c-1) \times \dots,$$

chacun des facteurs de ce dernier produit étant remplacé par l'unité, lorsque l'exposant qui s'y trouve est -1 ; la somme $\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \dots$ sera donc égale au produit des quantités

$$\begin{aligned} 1 + (a-1) + a(a-1) + a^2(a-1) + \dots + a^{\alpha-1}(a-1), \\ 1 + (b-1) + b(b-1) + b^2(b-1) + \dots + b^{\beta-1}(b-1), \\ 1 + (c-1) + c(c-1) + c^2(c-1) + \dots + c^{\gamma-1}(c-1), \text{ etc.}, \end{aligned}$$

(*) On en trouve une autre dans la 2^{me} section des *Recherches arithmétiques* de M. Gauss.

de sorte qu'en supprimant les termes qui se détruisent, il viendra

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \dots = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots = N. \quad C. Q. F. D.$$

II.

En mettant la fonction $(1+t+t^2+\dots+t^{m-1})^\mu$, sous la forme $(1-t^m)^\mu (1-t)^{-\mu}$, on trouve que le coefficient de t^s , dans le développement de cette fonction, peut être exprimé par

$$k = \sum_0^q (-1)^i \cdot C_{\mu,i} \cdot C_{s-im+\mu-1, \mu-1} :$$

dans cette formule, q représente le quotient entier de s par m , et $C_{n,p}$ désigne généralement le nombre des combinaisons de n lettres, prises p à p .

Prenons $s = (m-1)\mu$: le coefficient k deviendra l'unité; donc

$$(A) \quad 1.2.3 \dots (\mu-1) = \sum_0^q (-1)^i C_{\mu,i} \cdot P_{m(\mu-i)-1, \mu-1},$$

$P_{m(\mu-i)-1, \mu-1}$ désignant le nombre des arrangements de $m(\mu-i)-1$ lettres, prises $\mu-1$ à $\mu-1$.

Cette équation se simplifie dans le cas de $m > \mu$. En effet, le quotient exact de s par m étant $\frac{(m-1)\mu}{m} = \mu - \frac{\mu}{m}$, le quotient entier q se réduit alors à $\mu-1$. Donc

$$(B) \quad 1.2.3 \dots (\mu-1) = \sum_0^{\mu-1} (-1)^i C_{\mu,i} \cdot P_{m(\mu-i)-1, \mu-1}.$$

Les réductions exprimées par les équations (A) et (B) sont assez remarquables: on a par exemple, en prenant $m=8$ et $\mu=5$,

$$\begin{aligned} 1.2.3.4 &= 1.39.38.37.36 - \frac{5}{1} \cdot 31.30.29.28 + \frac{5.4}{1.2} \cdot 23.22.21.20 \\ &\quad - \frac{5.4}{1.2} \cdot 15.14.13.12 + \frac{5}{1} \cdot 7.6.5.4. \end{aligned}$$
