

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

**Note sur l'évaluation approchée du produit  $1.2.3.\dots x$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 4 (1839), p. 317-322.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1839\\_1\\_4\\_317\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4_317_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Note sur l'évaluation approchée du produit  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x$  ;*

PAR J. LIOUVILLE (\*).

1. La méthode dont je me servirai ressemble beaucoup à celle employée par M. Lacroix, dans son *Traité élémentaire du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (page 678 de la 5<sup>e</sup> édition). Cette méthode consiste à chercher le logarithme du produit  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x$ , et elle repose sur la formule connue de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2x}{2x-1} \cdot \frac{2x}{2x+1} \cdot \dots$$

en vertu de laquelle la quantité

$$2 \log 2 + 2 \log 4 + \dots + 2 \log (2x-2) + \log (2x) \\ - 2 \log 1 - 2 \log 3 - \dots - 2 \log (2x-3) - 2 \log (2x-1)$$

se réduit à  $\log \pi - \log 2$  lorsque  $x = \infty$ . Mais je la compléterai en donnant une limite supérieure de l'erreur commise dans l'évaluation approchée de  $\log (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x)$ .

2. Pour toute valeur positive de  $z$ , on a

$$\frac{1}{z} = \int_0^{\infty} e^{-az} da.$$

d'où il résulte, en intégrant par rapport à  $z$ ,

$$(1) \quad \log z = \int_0^{\infty} \frac{(e^{-a} - e^{-az}) da}{a}.$$

(\*) M. Binet a traité la même question par une méthode différente dont il a bien voulu me communiquer, il y a déjà long-temps, les résultats. Un extrait de son Mémoire a été publié dans un des derniers *Comptes rendus*.

Faisant successivement, dans cette formule,  $z=1, z=2, \dots, z=x$ , puis ajoutant les résultats ainsi obtenus, il nous viendra

$$(2) \quad \log (1.2.3 \dots x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} d\alpha}{\alpha} \left( x - \frac{1 - e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}} \right).$$

Ainsi la question est ramenée à trouver la valeur de l'intégrale définie placée dans le second membre de l'équation (2). Représentons cette intégrale par  $u$  et traitons  $x$  comme une variable continue. En différenciant nous obtiendrons

$$\frac{du}{dx} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \left( e^{-\alpha} - \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^\alpha - 1} \right).$$

3. La fonction  $\frac{\alpha}{e^\alpha - 1}$  qui sert de coefficient à  $e^{-\alpha x}$  et que nous désignerons par  $f(\alpha)$  peut se développer en une série ordonnée suivant les puissances de  $\alpha$ . En différenciant plusieurs fois de suite l'équation

$$(e^\alpha - 1) f(\alpha) = \alpha,$$

on a

$$\begin{aligned} (e^\alpha - 1) f'(\alpha) + e^\alpha f(\alpha) &= 1, \\ (e^\alpha - 1) f''(\alpha) + 2e^\alpha f'(\alpha) + e^\alpha f(\alpha) &= 0, \\ (e^\alpha - 1) f'''(\alpha) + 3e^\alpha f''(\alpha) + 3e^\alpha f'(\alpha) + e^\alpha f(\alpha) &= 0, \text{etc.;} \end{aligned}$$

de sorte qu'en posant  $\alpha = 0$  on trouve sans difficulté

$$f(0) = 1, f'(0) = -\frac{1}{2}, f''(0) = \frac{1}{6}, \dots$$

Les deux premiers termes du développement de  $f(\alpha)$  sont donc  $1 - \frac{\alpha}{2}$ ; et les autres ne peuvent contenir que des puissances paires de  $\alpha$ , car la différence  $f(\alpha) - 1 + \frac{\alpha}{2}$  est égale à la moitié de

$$\frac{\alpha \left( e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}} \right)}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}} = 2,$$

et par conséquent est une fonction paire de  $\alpha$ .

Les valeurs générales de  $f''(\alpha)$  et de  $f'''(\alpha)$  sont

$$f''(\alpha) = \frac{e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^3} [(\alpha - 2)e^\alpha + \alpha + 2],$$

$$f'''(\alpha) = -\frac{e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^4} [(\alpha - 3)e^{2\alpha} + 4\alpha e^\alpha + \alpha + 5].$$

En se rappelant que la variable  $\alpha$  est  $> 0$ , on peut prouver que la première de ces deux dérivées est essentiellement positive et la seconde essentiellement négative.

D'abord en posant

$$P = (\alpha - 2)e^\alpha + \alpha + 2,$$

on a

$$\frac{dP}{d\alpha} = (\alpha - 1)e^\alpha + 1, \quad \frac{d^2P}{d\alpha^2} = \alpha e^\alpha.$$

Pour toute valeur de  $\alpha > 0$ , on a  $\frac{dP}{d\alpha} > 0$  : on a aussi  $\frac{dP}{d\alpha} > 0$  et  $P > 0$ , puisque  $\frac{dP}{d\alpha}$  et  $P$  s'annulent pour  $\alpha = 0$  et prennent ensuite le signe de leur dérivée. Il suit évidemment de là que  $f''(\alpha)$  est une quantité positive.

Posons maintenant

$$P = (\alpha - 3)e^{2\alpha} + 4\alpha e^\alpha + \alpha + 5,$$

ce qui donne

$$\frac{dP}{d\alpha} = (2\alpha - 5)e^{2\alpha} + (4\alpha + 4)e^\alpha + 1,$$

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} = (4\alpha - 8)e^{2\alpha} + (4\alpha + 8)e^\alpha;$$

en faisant

$$Q = (\alpha - 2)e^\alpha + \alpha + 2,$$

nous aurons

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} = 4e^\alpha Q,$$

de manière que les deux fonctions  $Q$  et  $\frac{d^2P}{d\alpha^2}$  seront de même signe.

Or,  $Q$  et  $\frac{dQ}{d\alpha}$  sont zéro pour  $\alpha=0$ ; de plus  $\frac{d^2Q}{d\alpha^2}$  est  $> 0$  dès que  $\alpha$  surpasse zéro : donc il en est de même de  $Q$  et de  $\frac{d^2P}{d\alpha^2}$ ; par suite la fonction  $P$  jouit aussi de la même propriété puisque l'on a  $P=0$  et  $\frac{dP}{d\alpha}=0$  quand  $\alpha=0$ ; il suit évidemment de là que  $f'''(\alpha)$  est une quantité négative.

On voit d'après cela que  $f''(\alpha)$  est une fonction décroissante de  $\alpha$ , dont la plus grande valeur est égale à  $f''(0)$ , c'est-à-dire à  $\frac{1}{6}$ .

4. Après cette digression, revenons au développement de  $f(\alpha)$ . D'après une formule connue, nous pourrions écrire

$$\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = 1 - \frac{\alpha}{2} + R,$$

$R$  représentant, suivant que l'on voudra pousser le développement plus ou moins loin, ou la quantité

$$\frac{\alpha^2}{1.2} f''(\theta\alpha),$$

ou la quantité

$$\frac{\alpha^2 f''(0)}{2} + \dots + \frac{\alpha^{2n} f^{2n}(0)}{1.2 \dots 2n} + \frac{\alpha^{2n+2} f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2 \dots (2n+2)};$$

c'est ce que l'on comprendra en se rappelant que  $R$  est une fonction paire de  $\alpha$ : à peine est-il nécessaire d'avertir que  $\theta$  représente d'une manière générale un certain nombre compris entre 0 et 1. Cette valeur de  $f(\alpha)$ , substituée dans celle de  $\frac{du}{dx}$ , fournit

$$\frac{du}{dx} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} (e^{-x} - e^{-\alpha x} + \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha x} - R e^{-\alpha x}),$$

c'est-à-dire en vertu de la formule (1),

$$\frac{du}{dx} = \log x + \frac{1}{2x} - \int_0^\infty \frac{R e^{-\alpha x} d\alpha}{\alpha}.$$

Par conséquent

$$u = C + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + \int_0^\infty \frac{\operatorname{Re} e^{-ax} da}{a^2}.$$

Cette valeur de  $u$  est en même temps celle de  $\log(1.2.3\dots x)$ . Nous prouverons plus tard que la constante  $C$  est égale à  $\log(\sqrt{2\pi})$ .

5. On trouve aisément les limites de l'erreur que l'on commettrait en négligeant dans le second membre le terme

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Re} e^{-ax} da}{a^2}.$$

A cause de

$$R = \frac{a^2 f''(\theta a)}{2},$$

ce terme devient

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-ax} \cdot f''(\theta a) da.$$

Il est donc essentiellement positif comme la fonction  $f''(\theta a)$ . De plus il est moindre que

$$\frac{1}{12} \int_0^\infty e^{-ax} da \quad \text{ou} \quad \frac{1}{12x},$$

puisque l'on a  $f''(\theta a) < \frac{1}{6}$ .

Cette discussion nous montre qu'en désignant par  $\mu$  un certain nombre compris entre 0 et 1, on peut poser

$$\log(1.2.3\dots x) = C + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{\mu}{12x}.$$

6. Si l'on prend

$$R = \frac{a^2 f''(0)}{1.2} + \dots + \frac{a^{2n} f^{2n}(0)}{1.2\dots 2n} + \frac{a^{2n+2} f^{2n+2}(\theta a)}{1.2\dots (2n+2)},$$

le terme

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Re} e^{-ax} da}{a^2}$$

se présentera sous une autre forme; il deviendra

$$\frac{f''(0)}{2x} + \dots + \frac{f^{2n}(0)}{2n(2n-1) \cdot x^{2n-1}} + \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \cdot a^{2n} f^{2n+1}(\theta a) da}{1.2\dots (2n+2)},$$

et si l'on veut avoir une limite supérieure de la valeur absolue de l'intégrale dont il dépend, il suffira de remplacer  $f^{n+1}(\theta a)$  par le maximum absolu  $M$  de  $f^{n+1}(a)$ , ce qui permettra d'effectuer l'intégration.

7. Pour déterminer la constante  $C$ , mettons l'équation

$$\log(1.2.3\dots x) = C + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{\mu}{12x}$$

sous la forme

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log x = C + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + \text{etc.},$$

le signe etc. désignant un terme qui s'annule quand  $x = \infty$ .

Nous en tirerons facilement

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log 2x = C + \left(2x + \frac{1}{2}\right) \log 2x - 2x + \text{etc.}$$

A cause de

$$\log 2 + \log 4 + \dots + \log 2x = x \log 2 + \log 1 + \log 2 + \dots + \log x,$$

nous aurons aussi

$$\log 2 + \log 4 + \log 6 + \dots + \log 2x = C + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x + x \log 2 - x + \text{etc.}$$

Retranchant cette équation de celle qui donne la somme des logarithmes des nombres naturels depuis 1 jusqu'à  $2x$ , on obtient

$$\log 1 + \log 3 + \log 5 + \dots + \log(2x-1) = x \log x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log 2 - x + \text{etc.}$$

Retranchant à son tour le double de cette nouvelle équation du double de la précédente, il vient enfin

$$\left. \begin{aligned} &2 \log 2 + 2 \log 4 + 2 \log 6 + \dots + 2 \log(2x-2) + \log 2x \\ &- 2 \log 1 - 2 \log 3 - 2 \log 5 - \dots - 2 \log(2x-3) - 2 \log(2x-1) \end{aligned} \right\} = 2C - 2 \log 2 + \text{etc.},$$

de sorte qu'à l'aide de la formule de Wallis, citée plus haut, on trouve en faisant  $x$  infini,

$$\log \pi - \log 2 = 2C - 2 \log 2,$$

et par suite

$$C = \frac{1}{2}(\log \pi + \log 2) = \log(\sqrt{2\pi}).$$