

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-M.-C. DUHAMEL

Intégration d'une équation aux différences

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 4 (1839), p. 222-224.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4_222_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4_222_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Intégration d'une Équation aux Différences ;

PAR M. J.-M.-C. DUHAMEL.

Dans l'un des derniers numéros de ce Journal, M. Binet a donné, par la considération des fonctions génératrices, une intégrale de l'équation

$$(1) \quad T_n = T_{n-1} + T_{n-2}T_1 + T_{n-3}T_2 + \dots + T_{n-1},$$

mais dans le cas seulement où l'on a $T_1 = 1$, circonstance qui avait lieu dans le problème de Géométrie qui conduisait à cette équation.

Lorsque M. Binet exposa sa solution à la Société Philomatique, je fis remarquer qu'il pourrait être utile de ne pas s'astreindre à la condition $T_1 = 1$; et l'auteur ne s'étant pas occupé de cette généralisation, je donnai, à la séance suivante, la formule que je vais faire connaître, et à laquelle j'avais été conduit en suivant la même marche que M. Binet.

Posons

$$(2) \quad Z = 1 + T_1x + T_2x^2 + \dots + T_nx^n + \text{etc.} \dots$$

et supposons x assez petit pour que cette série soit convergente.

En la multipliant par elle-même et ordonnant par rapport à x , on aura une série convergente, dont la somme sera égale à Z^2 ; ce qui donne

$$Z^2 = 1 + (T_1 + T_1)x + (T_2 + T_1T_1 + T_2)x^2 + \dots + (T_n + T_nT_1 + \dots + T_n)x^n + \text{etc.}, \dots$$

ou, d'après l'équation (1),

$$Z^2 = 1 + T_2x + T_3x^2 + \dots + T_{n+1}x^n + \dots,$$

d'où l'on tire

$$Z^2 x = x + Z - 1 - T_1 x,$$

ou

$$Z^2 - \frac{1}{x} Z - 1 + T_1 + \frac{1}{x} = 0,$$

ce qui donne pour la valeur de la série Z , l'une de celles qui sont renfermées dans la formule

$$Z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x - 4(T_1 - 1)x^2}}{2x}.$$

Or, le signe supérieur du radical donnerait $Z = \infty$ pour $x = 0$, tandis que l'on doit trouver dans ce cas $Z = 1$. Donc la valeur de Z qui exprime la série (2), est

$$Z = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x - 4(T_1 - 1)x^2}}{2x}.$$

Développons le radical de la manière suivante

$$\sqrt{1 - 4x - 4x^2(T_1 - 1)} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + \text{etc.}$$

et substituons ce développement dans la valeur de Z : le coefficient de x^n sera $-\frac{A_{n+1}}{2}$, et l'on aura par conséquent

$$(3) \quad T_n = -\frac{A_{n+1}}{2}.$$

Or on a en général,

$$(1 + ax + bx^2)^{\frac{1}{2}} = [1 + x(a + bx)]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x(a + bx) + \dots$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - p + 1\right)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} x^p (a + bx)^p + \text{etc.}$$

Les termes du second membre qui concourront à former le coefficient total de x^n , commenceront à la valeur de p , telle que l'on ait $2p = n$, ou $2p > n$, et se termineront à $p = n$. En réunissant les coefficients

de x^n provenant de ces différents termes, et faisant $a = -4$, $b = -4(T_1 - 1)$, on connaîtra A_n , et par suite T_{n-1} , en vertu de l'équation (3). Remplaçant $n-1$ par m , on aura la formule suivante, dans laquelle on a représenté $T_1 - 1$ par C ,

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1.1.3.5 \dots (2m-1)}{2.4.6.8 \dots (2m+2)} 4^{m+1} + \frac{1.1.3 \dots (2m-3)}{2.4.6 \dots 2m} 4^m \cdot \frac{m}{1} C + \frac{1.1.3 \dots (2m-5)}{2.4.6 \dots 2m-2} 4^{m-1} \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} C \\ & + \frac{1.1.3 \dots (m-2)}{2.4.6 \dots (m+1)} 4^{\frac{m+1}{2}} C^{\frac{m+1}{2}}, \text{ si } m \text{ est impair,} \\ \text{et} & + \frac{1.1.3 \dots (m-1)}{2.4.6 \dots (m+2)} 4^{\frac{m+2}{2}} \cdot \frac{m+2}{2} C^{\frac{m}{2}}, \text{ si } m \text{ est pair.} \end{aligned} \right.$$

Telle est la valeur générale de T_n qui se déduit de l'équation (1), sans aucune hypothèse particulière. La constante C est tout-à-fait indéterminée ; et si l'on fait $m = 1$ dans l'équation (4), on retrouve

$$T_1 = C + 1.$$

T_1 peut donc être choisi arbitrairement ; mais c'est la seule indéterminée qui entre dans la valeur générale de T_n .

Si l'on suppose

$$T_1 = 1, \text{ on a } C = 0,$$

et, en supprimant les facteurs communs égaux à 2 :

$$T_n = \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{1.2.3 \dots (m+1)} \cdot 2^m;$$

c'est la valeur trouvée par M. Binet.