

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. TERQUEM

Solution d'un Problème de combinaison

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 3 (1838), p. 559-560.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3_559_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Solution d'un Problème de combinaison ;

PAR M. O. TERQUEM.

Ce problème, qui a été proposé par M. Stern (*), peut être énoncé de la manière suivante :

PROBLÈME. « Étant donnés les n nombres $1, 2, 3 \dots n-1, n$; si
 » on les permute n à n , on aura $[n]$ permutations; ce symbole désigne
 » le produit résultant de la multiplication de tous ces nombres; quel
 » est le nombre total des *dérangements* qui se rencontrent dans ces $[n]$
 » permutations ? »

Solution. Quand un nombre est suivi dans le même terme, *médiatement* ou *immédiatement*, d'un nombre plus petit que lui, on appelle cela un *dérangement*. C'est la définition de Cramer, telle qu'il la donne dans la belle règle qu'il a découverte, pour déterminer les signes des termes dans les formules générales relatives à la résolution des équations du 1^{er} degré (*Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques*. Appendice, p. 658). Par exemple, le terme 321 renferme trois dérangements et 123 n'en a aucun. Soit donc γ_n le nombre total des dérangements pour les n nombres : prenons en plus le nombre $n+1$ plus grand que tous les précédents, et soit γ_{n+1} le nombre total des dérangements pour ces $n+1$ nombres ; il s'agit de trouver une relation entre γ_{n+1} et γ_n ; à cet effet, faisons parcourir au nombre $n+1$ les diverses positions qu'il peut occuper. En le plaçant à la gauche de tous les termes, il augmente évidemment chaque terme de n dérangements ; en le plaçant entre le premier et le second nombre, il intro-

(*) *Journal de M. Crelle*, tome 18, p. 100, année 1838.

duit dans chaque terme $n-1$ nouveaux dérangements et ainsi de suite; dans la première position, le nombre des dérangements est donc $y_n + n[n]$; dans la seconde position, il est $y_n + (n-1)[n]$; dans la troisième position, $y_n + (n-2)[n]$, etc. Donc, on a

$$y_{n+1} = (n+1)y_n + \frac{n(n+1)}{2}[n] = (n+1)y_n + \frac{n}{2}[n+1]. \quad (A)$$

Cette équation donne celle-ci :

$$y_{n+2} = (n+2)y_{n+1} + \frac{n+1}{2}[n+2].$$

Des deux équations réunies, on déduit

$$y_{n+2} = (n+1)(n+2)y_n + \frac{2n+1}{2}[n+2];$$

de même

$$y_{n+3} = (n+1)(n+2)(n+3)y_n + \frac{3n+3}{2}[n+3],$$

et en général,

$$y_{n+p} = (n+1)(n+2) \dots (n+p)y_n + \frac{1}{2} \left[pn + \frac{p(p-1)}{2} \right] [n+p].$$

Faisant $n=1$, on a $y_1=0$; donc

$$y_{p+1} = \frac{p(p+1)}{4}[p+1].$$

Changeant $p+1$ en n , on a enfin, pour le terme général,

$$y_n = \frac{n(n-1)}{4}[n]. \quad \text{C. Q. F. T.}$$
