

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Note sur une Équation aux différences finies

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 3 (1838), p. 508-516.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3_508_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Note sur une Équation aux différences finies ;

PAR E. CATALAN.

M. Lamé a démontré que l'équation

$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \dots + P_4P_{n-4} + P_3P_{n-1} + P_n,$ (1)
se ramène à l'équation linéaire très simple,

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n. \quad (2)$$

Admettant donc la concordance de ces deux formules, je vais chercher à en déduire quelques conséquences.

I.

L'intégrale de l'équation (2) est

$$P_{n+1} = \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{14}{5} \dots \frac{4n-6}{n} P_3;$$

et comme, dans la question de géométrie qui conduit à ces deux équations, on a $P_3 = 1$, nous prendrons simplement

$$P_{n+1} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \dots (4n-6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n}. \quad (3)$$

Le numérateur

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \dots (4n-6) &= 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3) \\ &= \frac{2^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-2)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}. \end{aligned}$$

Donc

$$P_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (2n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}. \quad (4)$$

Si l'on désigne généralement par $C_{m,p}$ le nombre des combinaisons de m lettres, prises p à p ; et si l'on change n en $n + 1$, on aura

$$P_{n+1} = \frac{1}{n+1} C_{2n,n}, \quad (5)$$

ou bien

$$P_{n+1} = C_{2n,n} - C_{2n,n-1}. \quad (6)$$

II.

Les équations (1) et (5) donnent ce théorème sur les combinaisons :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n+1} C_{2n,n} &= \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1} + \frac{1}{n-1} C_{2n-4,n-2} \times \frac{1}{2} C_{2,1} \\ &+ \frac{1}{n-2} C_{2n-6,n-3} \times \frac{1}{3} C_{4,2} + \dots + \frac{1}{n} C_{2n-2,n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

III.

On sait que le $(n + 1)^e$ nombre figuré de l'ordre $n + 1$, a pour expression, $C_{2n,n}$: si donc, dans la table des nombres figurés, on prend ceux qui occupent la diagonale; savoir :

$$1, 2, 6, 20, 70, 252, 924 \dots;$$

qu'on les divise respectivement par

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots;$$

on obtiendra une nouvelle suite de nombres,

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132 \dots, \quad (A)$$

lesquels jouiront de cette propriété :

Un terme quelconque de la suite (A) est égal à la somme des produits que l'on obtient en écrivant au-dessous d'elle-même, et dans un ordre inverse, la série des termes précédents, et en multipliant les termes correspondants des deux séries.

Par exemple,

$$132 = 1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1.$$

Les nombres qui composent cette suite, sont à commencer du second, les valeurs de P_3, P_4, \dots

IV.

En mettant pour les quantités C , leurs valeurs dans l'équation (7), il vient

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n}{1} \cdot \frac{2n-1}{2} \dots \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n-2}{1} \cdot \frac{2n-3}{2} \dots \frac{n}{n-1} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{2n-4}{1} \cdot \frac{2n-5}{2} \dots \frac{n-1}{n-2} \\ \times \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} + \frac{1}{n-2} \cdot \frac{2n-6}{1} \dots \frac{n-2}{n-3} \times \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{2n-2}{1} \cdot \frac{2n-3}{2} \dots \frac{n}{n-1}$$

Et en multipliant les deux membres par $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$:

$$\overline{n \cdot 2n-1 \dots n+2} = \overline{2n-2 \cdot 2n-3 \dots n} + \frac{n}{1} \cdot \overline{2n-4 \dots n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \overline{2n-6} \\ \dots \overline{n-2} \times 4 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \overline{2n-8 \dots n-3} \times 6 \cdot 5 + \dots + \overline{2n-2 \dots n} \quad (8)$$

Dans ce développement, le terme qui en a i avant lui, a pour expression,

$$T_i = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} (2n-2i-2)(2n-2i-3) \dots (n-i) \times 2i(2i-1) \dots (i+2) \quad (9)$$

Cette quantité peut s'exprimer à l'aide des fonctions Γ , dont la définition est, comme on sait,

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1);$$

on a effectivement

$$T_i = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} \frac{\Gamma(2n-2i-1)}{\Gamma(n-i)} \cdot \frac{\Gamma(2i+1)}{\Gamma(i+2)};$$

ou

$$T_i = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} \frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)} \frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i)} \cdot \frac{\Gamma(2i+2)}{\Gamma(i+1)}.$$

A l'aide de la relation

$$\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

découverte par *Legendre*, nous transformerons les deux rapports

$$\frac{\Gamma(2n - 2i)}{\Gamma(n - i)}, \quad \frac{\Gamma(2i + 2)}{\Gamma(i + 1)},$$

en

$$\frac{2^{2n-2i-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n - i + \frac{1}{2}\right), \quad \frac{2^{2i+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(i + \frac{3}{2}\right);$$

alors le terme général devient

$$T_i = \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-i+1}{i} \frac{1}{(2n-2i-1)(2i+1)(i+1)} \cdot \frac{2^{2n}}{\pi} \Gamma\left(n - i + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(i + \frac{3}{2}\right);$$

ou enfin

$$T_i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots(i+1)} \cdot \frac{2^{2n-2}}{\pi} \Gamma\left(n - i - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(i + \frac{1}{2}\right). \quad (10)$$

Nous pouvons remplacer le produit des deux fonctions Γ par une intégrale eulérienne de première espèce, au moyen de la relation,

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 \theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1} d\theta;$$

et nous aurons

$$T_i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots(i+1)} \cdot \frac{2^{2n-2}}{\pi} \Gamma(n) \cdot \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta. \quad (11)$$

De même, si nous substituons au facteur

$$\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots(i+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+2)\Gamma(n-i+1)},$$

la quantité

$$\Gamma(n+1) : \Gamma(n+3) \int_0^1 \theta^{i+1}(1-\theta)^{n-i} d\theta;$$

nous obtiendrons finalement

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)} \frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}}(1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-i}(1-\theta)^{i+1} d\theta}, \quad (12)$$

Au moyen de cette valeur de T_1 , l'équation (8) devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n-1}}{\pi} \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)} \sum_0^{n-1} \frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-1} (1-\theta)^{i+1} d\theta},$$

ou

$$\frac{n+2}{2^{2n-1}} \pi = \int_0^1 \theta^{n-1} (1-\theta)^n d\theta \sum_0^{n-1} \frac{\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta}{\int_0^1 \theta^{n-1} (1-\theta)^{i+1} d\theta}, \quad (13)$$

V.

Le terme général de notre développement peut se mettre sous une forme différente de (12). Nous pouvons écrire

$$T_i = \frac{2^{2n-2}}{\pi} \Gamma(n+1) \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2}) \Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1) \Gamma(i+2)}.$$

Or

$$\frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} = \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

et

$$\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+2)} = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

donc

$$T_i = \frac{2^{2n}}{\pi^2} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (14)$$

Les valeurs (12) et (14) devant être identiques, on aura

$$\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{i-\frac{1}{2}} d\theta = \frac{4}{\pi} n(n+1)(n+2) \int_0^1 \theta^{n-1} (1-\theta)^{i+1} d\theta \\ \times \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (15)$$

Si l'on suppose $i = 1$, il vient

$$\pi = 4n(n+1)(n+2) \int_0^1 \theta^{n-1} (1-\theta)^2 d\theta \times \int_0^1 \theta^1 (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (16)$$

D'ailleurs, ces deux dernières relations se vérifient immédiatement.

En mettant pour T , sa nouvelle expression dans (8), cette équation devient

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n}}{\pi^2} \Gamma(n+1) \sum_0^{n-1} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Et à cause de

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} = 2 \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right);$$

puis de

$$\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta;$$

nous aurons enfin

$$2\pi \int_0^1 \theta^{n-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \sum_0^{n-1} \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \quad (17)$$

VI.

L'équation précédente exprime une propriété des fonctions Γ . Pour la mettre en évidence, remplaçons π par $2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$; puis chaque intégrale définie par sa valeur; il viendra

$$4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)} = \sum_0^{n-1} \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(i+2)};$$

ou, en changeant n en $n-1$ et i en $i-1$:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} \cdot \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \sum_1^{n-1} \frac{\Gamma(n-i-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)}. \quad (18)$$

Ainsi, en posant

$$\frac{\Gamma(i - \frac{1}{2})}{\Gamma(i + 1)} = A_i,$$

on a

$$A_1 \cdot A_n = \frac{1}{4} \sum_i^{n-1} A_{n-i} A_i. \quad (19)$$

Cette équation peut se mettre sous une forme plus simple. Pour cela, remarquons d'abord qu'en posant $i = 0$, la fonction A_i devient $\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}$. Or, $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$, et $\Gamma(1) = 1$. Si donc, après avoir chassé le dénominateur de l'équation précédente, nous ajoutons $2A_0 A_n$ aux deux membres, nous obtiendrons

$$4A_1 A_n - 4\sqrt{\pi} \cdot A_n = \sum_0^n A_{n-i} A_i.$$

ou simplement, à cause de $A_1 = \sqrt{\pi}$:

$$\sum_0^n A_{n-i} A_i = 0 \quad (20)$$

Autrement dit, l'équation aux différences finies

$$P_1 P_n + P_1 P_{n-1} + P_2 P_{n-2} + \dots + P_{n-1} P_1 + P_n P_0 = 0,$$

est satisfaite par $P_n = \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)}$, pourvu que l'on prenne $P_0 = -2\sqrt{\pi}$, $P_1 = \sqrt{\pi}$.

Il est d'ailleurs évident que cette équation n'a lieu qu'à partir de $n = 2$.

Il suit aussi, de ce qui précède, que l'intégrale générale de l'équation

$$4P_1 P_n = P_1 P_{n-1} + P_2 P_{n-2} + \dots + P_{n-1} P_1, \quad (21)$$

est

$$P_n = \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)} \cdot \frac{P_1}{\sqrt{\pi}}. \quad (22)$$

VII.

Je terminerai cette note par la solution d'un problème qui a une liaison remarquable avec la question de Géométrie, traitée par M. Lamé.

PROBLÈME. *De combien de manières peut-on effectuer le produit de n facteurs différents.*

Désignons par Z_{n+1} ce nombre.

Supposons les n facteurs écrits dans l'ordre alphabétique.

$$abc \dots ghkl \dots qrs;$$

décomposons ce produit en deux groupes, l'un composé de i facteurs $abc \dots gh$, l'autre composé des $n - i$ facteurs restants; désignons en outre par X_{n+1} le nombre de manières dont il est possible d'effectuer le produit ci-dessus, sans changer l'ordre des lettres: il est clair que l'un des éléments de cette somme sera $X_{i+1} X_{n-i+1}$. Et comme i peut varier depuis 1 jusqu'à $n - 1$, nous aurons sans aucune omission ni répétition:

$$X_{n+1} = \sum_0^{n-1} X_{i+1} \cdot X_{n-i+1}. \quad (23)$$

On doit supposer $X_2 = 1$; d'ailleurs X_3 est aussi égal à 1: il s'ensuit que l'équation (23) a la même intégrale que l'équation (1); savoir

$$X_{n+1} = P_{n+1}. \quad (24)$$

Nous avons supposé que les n facteurs étaient disposés en ordre alphabétique: comme ils peuvent être pris dans un ordre quelconque, la quantité X_{n+1} doit être multipliée par le nombre des permutations de n lettres; donc

$$Z_{n+1} = P_{n+1} \cdot \Gamma(n + 1),$$

ou

$$Z_{n+1} = n(n + 1)(n + 2) \dots (2n - 2). \quad (25)$$

Si, dans l'équation (23), nous mettons au lieu des X leurs valeurs en Z , nous trouverons après avoir multiplié tous les termes par $\Gamma(n + 1)$:

$$Z_{n+1} = \frac{n}{1} Z_n Z_n + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} Z_n Z_{n-1} + \dots + \frac{n}{1} Z_n Z_n, \quad (26)$$

et comme la formule (25) donne

$$Z_{n+1} = (4n - 6) Z_n. \quad (27)$$

Il s'ensuit que ces deux dernières équations rentrent l'une dans l'autre. Ce résultat, auquel il serait peut-être difficile d'arriver directement, est assez remarquable.

L'équation (26) devient, en mettant pour Z_{n+1} , sa valeur $\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)}$:

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{n}{1} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)} + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{\Gamma(2n-5)}{\Gamma(n-2)} + \dots + \frac{n}{1} \frac{\Gamma(2n-3)}{\Gamma(n-1)}.$$

A cause de

$$\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{(2n-2)\Gamma(2n-2)}{(n-1)\Gamma(n-1)} = 2 \frac{\Gamma(2n-2)}{\Gamma(n-1)} = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right),$$

cette dernière équation se transforme facilement en

$$\left. \begin{aligned} 4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) &= \frac{n}{1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{5}{2}\right) \\ &+ \dots + \frac{n}{1} \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Celle-ci peut encore s'écrire

$$\left. \begin{aligned} 4n \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{1}{2}} d\theta &= \frac{n+1}{1} \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{3}{2}} d\theta + \frac{n+1}{1} \frac{n}{2} \int_0^1 \theta^{-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{n-\frac{1}{2}} d\theta \\ &+ \dots + \frac{n+1}{1} \int_0^1 \theta^{n-\frac{3}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Les équations (28) ou (29) expriment une propriété des fonctions Γ , analogue à celle qui a été donnée plus haut.