

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. DELAUNAY

Détermination de l'intégration définie $\int_0^\pi \log(1 - 2a \cos x + a^2) dx$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 3 (1838), p. 355-356.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3_355_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Détermination de l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a \cos x + a^2) dx ;$$

PAR CH. DELAUNAY,

Élève-ingénieur des Mines

M. Poisson a donné la valeur de cette intégrale dans son Mémoire sur les intégrales définies, inséré dans le XVII^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique* : il trouve

1^o. Lorsque $a < 1$, $\int_0^\pi \log(1 - 2a \cos x + a^2) dx = 0$;

2^o. Lorsque $a > 1$, $\int_0^\pi \log(1 - 2a \cos x + a^2) dx = \pi \log(a^2)$.

Ces formules se déduisent très simplement du théorème de Cotes, comme nous allons le voir.

Ce théorème consiste dans la relation

$$\left(1 - 2a \cos \frac{\pi}{2n} + a^2\right) \left(1 - 2a \cos \frac{3\pi}{2n} + a^2\right) \dots \left(1 - 2a \cos \frac{2n-1}{n} \pi + a^2\right) = a^{2n} + 1$$

Chaque facteur du premier membre est compris dans la formule générale $1 - 2a \cos \frac{2i+1}{2n} \pi + a^2$, dans laquelle il faut donner successivement les valeurs 0, 1, 2, ... $n-1$; pour passer d'un facteur au suivant, il faut augmenter i de l'unité, ou, ce qui revient au même, augmenter l'arc compris sous le signe $\cos$ de la quantité constante $\omega = \frac{\pi}{n}$. Si nous élevons les deux membres de l'équation à une puissance marquée par ω , nous aurons

$$\left(1 - 2a \cos \frac{\pi}{2n} + a^2\right)^\omega \left(1 - 2a \cos \frac{3\pi}{2n} + a^2\right)^\omega \dots \left(1 - 2a \cos \frac{2n-1}{2n} \pi + a^2\right)^\omega = (a^{2n} + 1)^\omega$$

Prenant les logarithmes, il viendra

$$\Sigma \omega \log \left(1 - 2a \cos. \frac{2i+1}{2n} \pi + a^2 \right) = \log. (a^{2n} + 1)^{\frac{\pi}{2}}$$

ou bien, en posant $\frac{2i+1}{2} \pi = x$,

$$\Sigma \omega \log (1 - 2a \cos x + a^2) = \log. (a^{2n} + 1)^{\frac{\pi}{2}};$$

le signe Σ indique une somme prise relativement à la variable x , qui croît depuis $x = \frac{\pi}{2n}$ jusqu'à $x = \frac{2n-1}{2n} \pi$ par différences constantes et égales à ω .

Si nous supposons maintenant que n devienne infini, ω deviendra dx , la somme Σ se changera en une intégrale définie prise entre les limites $x = 0$, $x = \pi$, et le premier membre de l'équation deviendra

$$\int_0^{\pi} \log (1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

Pour savoir ce que devient le second membre, il faut distinguer deux cas :

1°. Si $a < 1$, $(a^{2n} + 1)^{\frac{\pi}{2}}$ se réduit à 1, et l'on a

$$\int_0^{\pi} \log (1 - 2a \cos x + a^2) dx = 0;$$

2°. Si $a > 1$, $(a^{2n} + 1)^{\frac{\pi}{2}}$ devient a^{2n} , et l'on a

$$\int_0^{\pi} \log (1 - 2a \cos x + a^2) dx = \pi \log (a^2).$$
