

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la Formule de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 2 (1837), p. 483-484.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2_483_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2_483_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur la Formule de Taylor;

PAR J. LIOUVILLE.

Soit $f(x)$ une fonction réelle de x , dont nous représenterons par $f'(x)$, $f''(x)$, etc. les dérivées successives. La formule de Taylor consiste, comme on sait, dans l'équation

$$f(x+y) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \dots + \frac{y^n}{1.2\dots n} f^n(x) + R,$$

dans laquelle R désigne le reste de la série. Lagrange a trouvé pour ce reste l'expression suivante :

$$R = \frac{y^{n+1}}{1.2\dots(n+1)} f^{n+1}(x + \theta y),$$

où θ est un certain nombre positif, plus petit que l'unité. Et il s'en est servi pour démontrer (en excluant le cas particulier où $f^n(x)=0$), que, pour des valeurs de y suffisamment petites, la valeur numérique de R devient inférieure à celle du terme $\frac{y^n}{1.2\dots n} f^n(x)$ auquel on s'arrête.

Ce théorème, très utile dans le calcul différentiel, peut subsister encore lors même que la dérivée de l'ordre $(n+1)$ devient infinie; et il y a, je crois, quelque inconvénient à introduire cette dérivée dans les calculs. Mais il est aisé d'en éviter l'emploi. En effet, au lieu de

$$f(x+y) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \dots + \frac{y^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{n-1}(x) + \frac{y^n}{1.2\dots n} f^n(x+\theta y),$$

on peut évidemment poser

$$f(x+y) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \dots + \frac{y^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{y^n}{1.2\dots n} f^n(x) + R,$$

pourvu que l'on prenne cette fois

$$R = \frac{y^n}{1.2\dots n} [f^n(x + \theta y) - f^n(x)].$$

Le rapport de R à $\frac{y^n}{1.2\dots n} f^n(x)$ se trouvant maintenant égal à

$$\frac{f^n(x + \theta y) - f^n(x)}{f^n(x)},$$

on comprend sans peine dans quels cas, pour de très petites valeurs de y , ce rapport demeure < 1 . Cela a lieu par exemple lorsque la fonction $f^n(x)$ est continue pour la valeur actuelle de x ; et même il est visible qu'alors on rendra le rapport dont nous parlons infiniment petit, en attribuant à y une valeur infiniment petite.

FIN DU TOME DEUXIÈME.