JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Sur quelques Propriétés générales des Surfaces gauches

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 413-417.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__413_0>

Sur quelques Propriétés générales des Surfaces gauches ;

Par M. CHASLES.

Théorème. *Tout plan mené par une génératrice d'une surface gauche touche la surface en un point, et lui est normal en un autre point ;*

Ces deux points ont entre eux la relation suivante :

Le produit de leurs distances à un certain point fixe, situé sur la génératrice, est constant.

Tout plan mené par une génératrice coupe la surface suivant une courbe; et le point où cette courbe rencontre la génératrice est le *point de contact* du plan et de la surface. Pour déterminer le point où le plan est *normal* à la surface, il faut mener, par la même génératrice, un second plan qui soit perpendiculaire au premier, et prendre le point où ce second plan touchera la surface; ce sera le point où le premier plan lui sera normal. Nous aurions donc pu énoncer le théorème de cette manière :

Étant menés, par une même génératrice d'une surface gauche, deux plans rectangulaires, les points où ces deux plans touchent la surface auront entre eux cette relation, que, le produit de leurs distances à un certain point fixe, situé sur la génératrice, sera constant.

On peut mener d'une infinité de manières un hyperboloïde à une nappe tangent à une surface gauche suivant toute l'étendue d'une génératrice; tout plan mené par la génératrice touchera la surface et l'hyperboloïde au même point; il suffit donc de démontrer le théorème pour un hyperboloïde.

Concevons trois systèmes de deux plans rectangulaires menés par une génératrice D d'un hyperboloïde. Soient A, A′ les plans du premier système, B, B′ ceux du second, et C, C′ ceux du troisième.

Ces six plans donnent lieu à la relation d'*involution* entre les sinus de leurs inclinaisons mutuelles; c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\sin C, A . \sin C, A'}{\sin C', A . \sin C', A'} = \frac{\sin C, B . \sin C, B'}{\sin C', B . \sin C', B'}.$$

Cette équation se vérifie aisément; car les angles qui y entrent sont égaux, deux à deux. Ainsi, par exemple, l'angle $\widehat{C, A}$ est égal à l'angle C', A', puisque les deux plans C', A' sont perpendiculaires, respectivement, aux deux plans C, A. Il s'ensuit que les facteurs des numérateurs sont égaux, un à un, aux facteurs des dénominateurs, et qu'ainsi l'équation est vérifiée.

Cette équation est une de celles qui subsistent quand on y remplace les sinus des inclinaisons des plans par les segments que ces plans font sur une transversale quelconque. Soit donc une transversale menée arbitrairement dans l'espace, et soient a, a', b, b', c, c' les points où les six plans A, A', B, B', C, C' la rencontrent; on aura entre ces points la relation

$$\frac{ca . ca'}{c'a . c'a'} = \frac{cb . cb'}{c'b . c'b'}.$$

Supposons que la transversale soit une génératrices D' de l'hyperboloïde, et soient $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ les points où les six plans sont tangents à l'hyperboloïde; alors les six droites $\alpha a, \alpha' a', \beta b, \beta' b', \gamma c, \gamma' c'$ seront six génératrices du second mode de génération de l'hyperboloïde.

Considérons le quadrilatère formé par les quatre génératrices D, D', γc, $\gamma' c'$, dont les sommets, pris consécutivement, sont γ, c, c', γ'. On sait que pour une génératrice quelconque qui s'appuie en μ et m sur les deux côtés opposés $\gamma\gamma'$, cc', on a la relation constante

$$\frac{mc}{mc'} = k . \frac{\mu\gamma}{\mu\gamma'},$$

où k est une constante (*).

(*) J'ai démontré ce théorème dans le tome II de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, p. 446. Depuis il a été reproduit dans plusieurs traités de Géométrie descriptive.

Prenant successivement, pour la génératrice μm, les quatre droites αa, $\alpha' a'$, $\mathcal{C} b$, $\mathcal{C}' b'$, on aura

$$\frac{ac}{ac'} = k \cdot \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma'}, \quad \frac{a'c}{a'c'} = k\,\frac{\alpha'\gamma}{\alpha'\gamma'},$$
$$\frac{bc}{bc'} = k \cdot \frac{\mathcal{C}\gamma}{\mathcal{C}\gamma'}, \quad \frac{b'c}{b'c'} = k\,\frac{\mathcal{C}'\gamma}{\mathcal{C}'\gamma'},$$

D'après ces relations, l'équation ci-dessus devient celle-ci :

$$\frac{\gamma\alpha \cdot \gamma\alpha'}{\gamma'\alpha . \gamma'\alpha'} = \frac{\gamma\mathcal{C} \cdot \gamma\mathcal{C}'}{\gamma'\mathcal{C} . \gamma'\mathcal{C}'}.$$

α, α', $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, γ, γ' sont les points de contact des six plans A, A′, B, B′, C, C′ avec l'hyperboloïde, et par conséquent avec la surface gauche. Et si l'on ne considère que les trois plans A, B, C qui sont menés arbitrairement par la génératrice D, nous dirons que α, $\mathcal{C}$, γ sont les points où ils touchent la surface, et α', $\mathcal{C}'$, γ' les points où ils lui sont normaux. L'équation ci-dessus exprime donc une propriété générale de la surface, relative aux trois plans A, B, C. Cette équation est celle qu'on appelle *involution de six points ;* nous pouvons donc dire que

Si l'on mène trois plans quelconques par une génératrice d'une surface gauche, les trois points où ils seront tangents à la surface, et les trois points où ils lui seront normaux seront six points en involution.

Maintenant supposons que le plan C soit mené parallèlement à la génératrice de la surface qui est infiniment voisine de la génératrice D; alors le point de contact du plan C avec la surface sera à l'infini; ou, en d'autres termes, la courbe d'intersection de la surface par le plan C ne rencontrera la génératrice D qu'à l'infini, puisque ce plan rencontre la génératrice infiniment voisine à l'infini. Ainsi le point γ est à l'infini, et l'équation ci-dessus se réduit à

$$\gamma'\alpha \cdot \gamma'\alpha' = \gamma'\mathcal{C} \cdot \gamma'\mathcal{C}'.$$

Donc le produit des distances des deux points α, α' au point γ' est égal au produit des distances des deux points $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ au même point γ'.

Ce qui démontre le théorème énoncé.

Observations. Le point γ' est, comme on voit, celui où le plan mené par la génératrice D, parallèlement à la génératrice infiniment voisine, est *normal* à la surface. Appelons O ce point, au lieu de γ'. Ce point O jouit de quelques propriétés géométriques.

Pour déterminer ce point, il faut concevoir le plan mené par la génératrice D parallèlement à la génératrice infiniment voisine D', et mener par la droite D un second plan perpendiculaire à ce premier; puis chercher le point où ce second plan touchera la surface : ce point de contact sera le point O. Or le second plan passera par la droite qui mesure la plus courte distance des deux génératrices D, D'. Cette droite, qui est infiniment petite, est située sur la surface; le point où elle s'appuie sur la génératrice D est donc le point de contact du second plan avec la surface. C'est donc le point O.

Ainsi, *le point* O *est le point où la droite qui mesure la plus courte distance entre la génératrice* D *et la génératrice infiniment voisine, s'appuie sur la première.*

Que par tous les points de la génératrice D on mène des plans perpendiculaires à cette droite, et des tangentes aux courbes d'intersection de la surface par ces plans; ces tangentes s'appuieront sur la génératrice infiniment voisine D', et formeront un paraboloïde hyperbolique tangent à la surface suivant la génératrice D.

Le sommet de ce paraboloïde est le point O.

En effet, ce qui caractérise le sommet d'un paraboloïde, c'est que le plan tangent en ce point est perpendiculaire aux deux plans *directeurs* du paraboloïde (*). Or le premier plan directeur du paraboloïde est perpendiculaire à la génératrice D; le plan tangent en O lui est donc perpendiculaire. Le second plan directeur est parallèle aux deux génératrices D, D'; et, par conséquent, perpendiculaire à la droite qui mesure la plus courte distance de ces deux génératrices; donc le plan tangent en O, qui passe par cette droite, est perpendiculaire à ce second plan directeur. Donc *le point* O *est le sommet du paraboloïde.*

Maintenant supposons que le paraboloïde tourne autour de la génératrice D, et fasse un qua t de conversion; ses génératrices qui étaient perpendiculaires à la dro te D lui seront restées perpendiculaires et

(*) Les plans *directeurs* d'un paraboloïde sont les deux plans auxquels les génératrices des deux modes de génération du paraboloïde sont respectivement parallèles.

seront devenues normales à la surface, puisqu'elles étaient situées auparavant dans ses plans tangents. On conclut de là que

Les normales à une surface gauche, menées par les différents points d'une de ses génératrices, forment un paraboloïde qui a son sommet au point O *déterminé ci-dessus.*

De ces considérations résulte la construction suivante du point O :

Qu'en trois points de la génératrice D on mène les normales à la surface ; qu'on cherche une droite qui s'appuie sur ces trois normales, et qu'on mène la droite qui mesure la plus courte distance entre cette droite et la génératrice D; *le point où cette plus courte distance s'appuiera sur la génératrice* D *sera le point* O.

Enfin, l'équation

$$O\alpha . O\alpha' = O\beta . O\beta'$$

donne un autre moyen pour construire le point O; car les points α, α', β, β' étant connus, cette équation fait connaître le point O.

Sur chaque génératrice d'une surface gauche il existe un pareil point O, qu'on peut définir aussi comme étant le sommet du paraboloïde normal à la surface suivant la génératrice. Tous ces points forment sur la surface une ligne courbe qui jouit de diverses propriétés que nous examinerons dans un autre article. Nous nous bornerons à dire ici que, sur un paraboloïde, cette courbe est l'ensemble de deux paraboles qui ont pour axe commun celui du paraboloïde.