

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUG. CAUCHY

**Note sur la variation des constantes arbitraires dans
les problèmes de Mécanique**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 2 (1837), p. 406-412.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2_406_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique ;

PAR M. AUG. CAUCHY (*).

1. Soient données, entre la variable t , n fonctions de t désignées par $x, y, z, \dots$, et n autres fonctions de t désignées par $u, v, w, \dots$, $2n$ équations différentielles du premier ordre et de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{du}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dQ}{dv}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dQ}{dw}, \dots, \\ \frac{du}{dt} = -\frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{dQ}{dz}, \dots, \end{cases}$$

Q représentant une fonction de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots, t$. On pourra supposer les inconnues $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$, exprimées en fonction de t et de $2n$ constantes arbitraires $a, b, c, \dots$; et l'on aura, dans cette hypothèse,

$$\frac{dQ}{da} = \frac{dQ}{dx} \frac{dx}{da} + \frac{dQ}{dy} \frac{dy}{da} + \dots + \frac{dQ}{du} \frac{du}{da} + \dots;$$

(*) Cet article fait partie d'un très long mémoire sur la Mécanique céleste qui a été présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831 et dont on peut voir un extrait dans le *Bulletin universel des Sciences* de M. Férussac.

(J. LIOUVILLE.)

par conséquent

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dQ}{da} = -\frac{du}{dt} \frac{dx}{da} - \frac{dv}{dt} \frac{dy}{da} - \dots + \frac{dx}{dt} \frac{du}{da} + \dots, \\ \text{on trouvera de même} \\ \frac{dQ}{db} = -\frac{du}{dt} \frac{dx}{db} - \frac{dv}{dt} \frac{dy}{db} - \dots + \frac{dx}{dt} \frac{du}{db} + \dots, \end{cases}$$

Si de la seconde des équations (2), différenciée par rapport à la quantité a , on retranche la première différenciée par rapport à b , on obtiendra la suivante,

$$(3) \quad \frac{d[a, b]}{dt} = 0,$$

la valeur de $[a, b]$ étant

$$(4) \quad [a, b] = \frac{dx}{da} \frac{du}{db} - \frac{dx}{db} \frac{du}{da} + \frac{dy}{da} \frac{dv}{db} - \frac{dy}{db} \frac{dv}{da} + \dots,$$

puis, en intégrant l'équation (3), on trouvera

$$(5) \quad [a, b] = \text{constante.}$$

Donc, les quantités représentées par les symboles $[a, b]$, $[a, c]$, ... $[b, c]$, ... seront indépendantes de t . Observons d'ailleurs qu'en vertu de la formule (4), on aura généralement

$$[a, a] = 0, \quad \text{et} \quad [a, b] = -[b, a].$$

Soient maintenant

$$A = a, \quad B = b, \quad C = c, \quad \text{etc.} \dots$$

les intégrales générales des équations (1), $A, B, C, \dots$ désignant des fonctions déterminées des seules variables $x, y, z, \dots u, v, w, \dots t$.
52..

Faisons de plus

$$(7) \quad (A, B) = \frac{dA}{dx} \frac{dB}{du} - \frac{dA}{du} \frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy} \frac{dB}{dv} - \frac{dA}{dv} \frac{dB}{dy} +$$

on aura encore

$$(A, A) = 0, \quad (A, B) = - (B, A).$$

D'ailleurs, si, dans l'équation qui détermine x en fonction de $a, b, c, \dots, t$, on substitue $A, B, C, \dots$ au lieu de $a, b, c, \dots$, on obtiendra une formule identique, qui, différenciée successivement par rapport à $x, y, z, \dots, u, \dots$ donnera

$$(8) \quad 1 = \frac{dx}{da} \frac{dA}{dx} + \frac{dx}{db} \frac{dB}{dx} + \dots, \quad 0 = \frac{dx}{da} \frac{dA}{dy} + \frac{dx}{db} \frac{dB}{dy} + \dots, \quad 0 = \text{etc.},$$

et, si l'on ajoute entre elles les valeurs de $(A, A), (A, B), (A, C), \dots$ respectivement multipliées par $\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}, \frac{dx}{dc}, \dots$ on trouvera, en ayant égard aux formules (8),

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A, A) \frac{dx}{da} + (A, B) \frac{dx}{db} + (A, C) \frac{dx}{dc} + \dots = - \frac{dA}{du}; \\ \text{on trouvera de même,} \\ (A, A) \frac{dy}{da} + (A, B) \frac{dy}{db} + (A, C) \frac{dy}{dc} + \dots = - \frac{dA}{dv}, \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Pareillement, si l'on ajoute entre elles les valeurs de $(A, A), (A, B), (A, C), \dots$ respectivement multipliées par $\frac{du}{da}, \frac{du}{db}, \frac{du}{dc}, \dots$ on trouvera

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A, A) \frac{du}{da} + (A, B) \frac{du}{db} + (A, C) \frac{du}{dc} + \dots = \frac{dA}{dx}; \\ \text{on aura de même} \\ (A, A) \frac{dv}{da} + (A, B) \frac{dv}{db} + (A, C) \frac{dv}{dc} + \dots = \frac{dA}{dy}, \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

D'autre part, si l'on différencie successivement la première des formules (6) par rapport à chacune des quantités $a, b, c, \dots$ en considérant $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$ comme des fonctions de $a, b, c, \dots, t$, on en tirera

$$(11) \quad 1 = \frac{dA}{da} \frac{dx}{da} + \frac{dA}{dy} \frac{dy}{da} + \dots + \frac{dA}{du} \frac{du}{da} + \dots, \quad 0 = \frac{dA}{dx} \frac{dx}{db} + \dots, \quad 0 = \frac{dA}{dx} \frac{dx}{dc} + \dots,$$

etc.

Cela posé, si l'on combine par voie d'addition les formules (9) et (10), après avoir multiplié respectivement les formules (9) par $-\frac{du}{da}$, $-\frac{dv}{da}$, $-\frac{dw}{da}$, $\dots$ et les formules (10) par $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$, $\dots$, on trouvera, en ayant égard à la première des équations (11),

$$(12) \quad \begin{cases} (A, A)[a, a] + (A, B)[a, b] + (A, C)[a, c] + \dots = 1; \\ \text{on aura de même,} \\ (A, A)[b, a] + (A, B)[b, b] + (A, C)[b, c] + \dots = 0, \\ (A, A)[c, a] + (A, B)[c, b] + (A, C)[c, c] + \dots = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Les équations (12) suffisent pour déterminer les valeurs des quantités (A, B) , (A, C) , etc..., quand on connaît celles des quantités constantes $[a, b]$, $[a, c]$, $\dots$, $[b, c]$. Des équations semblables détermineront les valeurs de (B, A) , (B, C) , $\dots$ etc... Donc les quantités (A, B) , (A, C) , $\dots$, (B, C) , etc... sont elles-mêmes constantes, et ne dépendent pas de la variable t .

Il est bon d'observer que, si, dans les équations (6) différenciées par rapport à t , on substitue les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\dots$, $\frac{du}{dt}$, $\dots$ tirées des équations (1), les formules ainsi obtenues, savoir,

$$(13) \quad 0 = \frac{dA}{dx} \frac{dQ}{du} + \frac{dA}{dy} \frac{dQ}{dv} + \dots - \frac{dA}{du} \frac{dQ}{dx} - \dots, \quad 0 = \frac{dB}{dx} \frac{dQ}{du} + \dots - \frac{dB}{du} \frac{dQ}{dx} - \dots,$$

auront pour seconds membres des fonctions identiquement nulles de $x, y, z, u, v, w, \dots, t$. Car, s'il en était autrement, il existerait entre les valeurs générales de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots, t$, et par conséquent aussi entre les valeurs initiales de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$ correspondantes à $t=0$, des équations qui ne renfermeraient aucune constante arbitraire; ce qui est absurde, puisque ces valeurs initiales peuvent être choisies arbitrairement.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'intégrer non plus les équations (1), mais les suivantes :

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{du} + \frac{dR}{du}, & \frac{dy}{dt} = \frac{dQ}{dv} + \frac{dR}{dv}, & \frac{dz}{dt} = \frac{dQ}{dw} + \frac{dR}{dw}, \text{ etc...}, \\ \frac{du}{dt} = -\frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dx}, & \frac{dv}{dt} = -\frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dy}, & \frac{dw}{dt} = -\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dz}, \text{ etc...}, \end{cases}$$

on pourra supposer encore les valeurs de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$ déterminées par les équations (6), pourvu que l'on y considère $a, b, c, \dots$ comme devenant fonctions de t . Alors, si, dans la première des équations (6), différenciée par rapport à t , on substitue les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{du}{dt}, \dots$ tirées des équations (14), si d'ailleurs on a égard à la première des formules (13), qui subsiste, quelles que soient les valeurs de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots, t$, on trouvera

$$(15) \quad \frac{da}{dt} = \frac{dA}{dx} \frac{dR}{du} + \frac{dA}{dy} \frac{dR}{dv} + \dots - \frac{dA}{du} \frac{dR}{dx} - \dots,$$

Enfin, si, après avoir exprimé R en fonction de $a, b, c, \dots, t$, on y substitue, au lieu de $a, b, c, \dots$ les fonctions de $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots, t$ représentées par $A, B, C, \dots$, on retrouvera identiquement la première valeur de R ; et l'on aura, par suite,

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{dR}{dx} &= \frac{dR}{da} \frac{dA}{dx} + \frac{dR}{db} \frac{dB}{dx} + \dots, & \frac{dR}{dy} &= \frac{dR}{da} \frac{dA}{dy} + \frac{dR}{db} \frac{dB}{dy} + \dots, \text{ etc...}, \\ \frac{dR}{du} &= \frac{dR}{da} \frac{dA}{du} + \dots, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Cela posé, la formule (15) donnera

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{da}{dt} = (A, B) \frac{dR}{db} + (A, C) \frac{dR}{dc} + \dots; \text{ on trouvera de même} \\ \frac{db}{dt} = (B, A) \frac{dR}{da} + (B, C) \frac{dR}{dc} + \dots, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Telles sont les équations différentielles qui devront servir à déterminer $a, b, c, \dots$ en fonction de t . Les coefficients de..... $\frac{dR}{da}, \frac{dR}{db}, \dots$ dans ces équations, seront, d'après les remarques précédemment faites, des fonctions des seules quantités $a, b, c, \dots$; et la variable t n'y entrera pas d'une manière explicite.

Application à la Mécanique céleste.

2. Soient M la masse du Soleil, $m, m', m'', \dots$ les masses des planètes: prenons pour origine des coordonnées le centre du Soleil, et soient

$$x, y, z, \quad x', y', z', \dots$$

les coordonnées des planètes dans leurs mouvements relatifs autour de cet astre. En choisissant convenablement l'unité de masse, désignant par u, v, w les vitesses de m mesurées parallèlement aux axes des x, y, z , et faisant pour abréger

$$M = M + m,$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ etc.},$$

$$r'' = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$R = \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} + \dots - \frac{m''}{r''} - \dots,$$

on trouvera pour les équations différentielles du mouvement de m ,

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{Mx}{r^3} - \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{My}{r^3} - \frac{dR}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{Mz}{r^3} - \frac{dR}{dz}.$$

Pour déduire ces dernières formules des équations (14) du numéro précédent, il suffira de prendre

$$Q = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - \frac{M}{r}$$

et d'admettre que R est fonction seulement de $x, y, z, x', y', z', \dots$. Ainsi la théorie générale exposée ci-dessus s'applique sans difficulté aux équations différentielles du mouvement des planètes.
