JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur une Lettre de d'Alembert à Lagrange

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 245-247.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__245_0>

Sur une Lettre de D'ALEMBERT *à* LAGRANGE ;

PAR J. LIOUVILLE

On sait que pour trouver l'intégrale complète d'une équation différentielle linéaire quelconque

$$(1) \qquad Py + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + M\frac{d^my}{dx^m} = X,$$

il suffit de connaître m ou même $(m-1)$ intégrales particulières, distinctes entre elles, de l'équation plus simple

$$(2) \qquad Py + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + M\frac{d^my}{dx^m} = 0.$$

Plus généralement, dès qu'on possède n intégrales particulières de l'équation (2), on peut ramener l'intégration de l'équation (1) à celle d'une autre équation linéaire de l'ordre $(m-n)$. Ces propositions fondamentales se déduisent facilement du principe de la variation des constantes; mais en les donnant pour la première fois dans le mémoire intitulé *Solution de différents problèmes de Calcul intégral*, Lagrange a fait usage d'un procédé singulier fondé sur l'intégration par parties : ce procédé a beaucoup d'analogie avec celui dont les géomètres se servent si souvent dans le calcul des équations différentielles partielles, lorsqu'ils déterminent les coefficients des divers termes des séries qui représentent, dans les problèmes physico-mathématiques, l'état initial des températures ou des vitesses de chaque molécule d'un système matériel donné.

Pour intégrer l'équation (1) on peut encore employer une autre méthode qu'il serait aisé de rattacher à celle de la variation des constantes et qui consiste à profiter de chaque intégrale particulière de l'équation (2) pour abaisser l'ordre de l'équation (1) d'une unité. En effet si y_1 désigne une de ces intégrales particulières et si l'on pose $y = y_1 \int t dx$, l'inconnue t dépendra d'une équation de l'ordre $(m-1)$ que l'on pourra semblablement abaisser à l'ordre $(m-2)$ si l'on connaît une seconde intégrale particulière y_2. En continuant ainsi l'on parvient enfin à une équation du premier ordre qui n'offre plus aucune difficulté. M. Libri a présenté cette méthode comme nouvelle dans le recueil de M. Crelle et même dans le présent journal (tome I, page 10). De plus, dans la 5e édition de son excellent *Traité élémentaire du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, un auteur dont personne ne respecte plus que moi les talents et le caractère, M. Lacroix s'exprime ainsi : *M. Libri a repris d'une manière très élégante et très féconde la théorie des équations différentielles linéaires*. Je me crois donc obligé d'avertir que la méthode dont il est question appartient non pas à M. Libri, mais à un géomètre français, à d'Alembert qui l'a donnée en 1764, dans une lettre écrite à Lagrange et imprimée tome III des *Miscellanea Taurinensia*, page 381. J'ignore comment ce passage a pu échapper à M. Libri qui s'est occupé si long-temps de l'histoire des sciences mathématiques(*).

(*) Voici la lettre de d'Alembert :

« Votre problème sur l'intégration de l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{Rd^2y}{dx^2} \ldots + \frac{Md^my}{dx^m} = X$, lorsque l'on a $m-1$ valeurs de y dans l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{Rd^2y}{dx^2} + \ldots \frac{Md^my}{dx^m} = 0$, m'a paru si beau, que j'en ai cherché une solution que voici.

» Soit $y = Vz$, V étant une indéterminée, et z une des valeurs de y qui satisfait à l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \ldots$ etc. $= 0$, et soit substituée cette valeur dans l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} +$ etc. .... $= X$; la transformée sera composée 1° d'une partie $V\left(Pz + \frac{Qdz}{dx} \ldots + \frac{Md^mz}{dx^m}\right)$, où X ne se trouvera point, laquelle sera évidemment $= 0$, à cause de $Pz + \frac{Qdz}{dx} + \ldots \frac{Md^m z}{dx^m} = 0\,(hyp.)$; 2° d'une partie où V ne se trouvera point, et qui ne contenant que dV avec ses différences jusqu'à $d^m V$ inclusivement, pourra par conséquent être abaissée au $(m-1)^e$ degré, en faisant $dV = V'dx$; or puisqu'on a $m-1$ valeurs de y, que $y = Vz$, et que z est déjà une des valeurs de y, on aura donc $m-2$ valeurs de V, en n'y comprenant pas l'unité; donc supposant que z' soit une de ces valeurs, et faisant $V' = z' \int V'' dx$, comme on a fait $y = z \int V' dx$, on abaissera de même l'équation en V', et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation qui sera de cette forme $dV''^{\text{ etc.}} + KV''^{\text{ etc.}}\,dx = X$, K et X étant des fonctions de x. Or on sait que cette équation est intégrable.

» Il est aisé de voir par cet exposé, 1° qu'à chaque transformation il disparaît un des coefficients, savoir celui de y par la première, celui de dy par la seconde, etc., en sorte que dans la dernière transformée il ne restera que les deux coefficients de $d^m y$ et $d^{m-1} y$; or si on a une quantité de cette forme.... $\frac{\alpha d^{m-1}\lambda}{dx^{m-1}} + \frac{\beta d^m \lambda}{dx^m}$, et qu'on fasse $d\lambda = \zeta\eta dx$, on aura dans la transformée (en laissant à part les autres termes) 1° $\beta\zeta$ à la place de β et $\frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}}$ à la place de $\frac{d^m\lambda}{dx^m}$. 2° $[\alpha\zeta + \frac{\beta d\zeta}{dx} \times (m-1)]\,\frac{d^{m-2}\eta}{dx^{m-2}}$ au lieu de $\frac{\alpha d^{m-1}\lambda}{dx^{m-1}}$. Donc si on suppose que $\frac{Nd^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{Md^m y}{dx^m}$ soient les deux derniers termes du premier membre de la proposée, et qu'on fasse $y = z\int z' dx \int z'' dx \int z''' \ldots \int V''^{\text{etc.}} dx$, il sera aisé de trouver, par la remarque précédente, la forme de la dernière transformée, d'où l'on tirera aisément la valeur de $V''^{\text{ etc.}}$. Je ne fais, Monsieur, qu'indiquer l'opération, qui serait très simple et très courte; vous supplérez aisément à ce que je ne dis pas.»