

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la sommation d'une série

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 2 (1837), p. 107-108.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__107_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur la sommation d'une série;

PAR J. LIOUVILLE.

En représentant par $X_0 + X_1z + \text{etc.}$ ou par $\sum X_n z^n$ le développement de $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, on sait que $X_0 = 1$ et qu'en général X_n est une fonction entière de x de degré n : de plus, si m est différent de n , on a les deux formules connues

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Soit $\Psi(x)$ une fonction entière de x de degré n : $\Psi(x)$ peut toujours se mettre sous la forme $A_0 X_0 + \dots + A_{n-1} X_{n-1} + A_n X_n$, $A_0 \dots A_{n-1}$, A_n étant des constantes : cela est évident lorsque $\Psi(x)$ se réduit à une constante A_0 , puisque dans ce cas $\Psi(x) = A_0 X_0$; il suffit donc de prouver que si le théorème énoncé est exact pour les fonctions de degré $(n-1)$, il aura lieu pour celles de degré n : or en prenant A_n tel que les coefficients de x^n soient égaux dans $\Psi(x)$ et dans $A_n X_n$, $\Psi(x) - A_n X_n$ n'étant plus de degré $(n-1)$, devient réductible à la forme $A_{n-1} X_{n-1} + \dots + A_0 X_0$, d'où résulte $\Psi(x) = A_0 X_0 + \text{etc.}$ En particulier, on peut mettre sous la forme citée $A_0 X_0 + \dots + A_n X_n$ une puissance quelconque x^n .

Maintenant soit proposé de trouver la valeur $F(x)$ de la série

$$(1) \quad F(x) = \sum \left\{ \frac{2n+1}{2} \cdot X_n \cdot \int_{-1}^{+1} f(x) X_n dx \right\},$$

dans laquelle n est successivement $0, 1, 2, 3, \dots$: la variable x

reste comprise entre -1 et $+1$, et $f(x)$ est une fonction arbitraire de x qui ne devient jamais infinie. Multiplions par $X_n dx$ et intégrons de $x = -1$ à $x = +1$ les deux membres de l'équation (1) : cette intégration fera disparaître tous les termes du second membre à l'exception d'un seul, et l'on trouvera

$$\int_{-1}^{+1} [F(x) - f(x)] X_n dx = 0 :$$

en multipliant l'intégrale précédente par une constante A_n , il vient

$$\int_{-1}^{+1} [F(x) - f(x)] A_n X_n dx = 0 :$$

n étant quelconque dans cette équation, on en tire sans peine

$$\int_{-1}^{+1} [F(x) - f(x)] (A_0 X_0 + \dots + A_n X_n) dx = 0 ,$$

et par conséquent

$$\int_{-1}^{+1} [F(x) - f(x)] x^n dx = 0 ,$$

d'où par un lemme démontré (page 1 de ce volume), on conclut $F(x) = f(x)$, résultat auquel les géomètres sont arrivés depuis longtemps par d'autres méthodes moins simples ou moins rigoureuses que la nôtre. De plus, si l'on désigne par σ la somme des n premiers termes de la série (1), on peut prouver que la différence $f(x) - \sigma$ change de signe au moins n fois lorsque x croît de -1 à $+1$.
