

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-M. FAVRE-ROLLIN

**Note sur une Méthode d'élimination pour certaines classes
d'équations différentielles linéaires**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 1 (1836), p. 88-92.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__88_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

*Sur une Méthode d'élimination pour certaines classes
d'équations différentielles linéaires;*

PAR A.-M. FAVRE-ROLLIN.

I.

Soient deux équations de la forme

$$M \frac{d^m y}{dt^m} + N \frac{d^n y}{dt^n} + P \frac{d^p y}{dt^p} + \text{etc.} = V, \quad (1)$$

$$M_1 \frac{d^{m_1} y}{dt^{m_1}} + N_1 \frac{d^{n_1} y}{dt^{n_1}} + P_1 \frac{d^{p_1} y}{dt^{p_1}} + \text{etc.} = V_1, \quad (2)$$

dans lesquelles V et V_1 sont des fonctions quelconques de la variable indépendante t et d'une ou plusieurs autres variables, ainsi que de leurs coefficients différentiels. Si les coefficients $M, N, P, \dots, M_1, N_1, P_1, \dots$ sont constants, il suffira, pour éliminer y et ses différentielles, d'écrire à la place de y, V_1 dans le premier membre de l'équation (1), et V dans le premier membre de l'équation (2), et d'égaliser les résultats, en sorte que l'équation finale sera

$$M \frac{d^m V_1}{dt^m} + N \frac{d^n V_1}{dt^n} + P \frac{d^p V_1}{dt^p} + \text{etc.} = M_1 \frac{d^{m_1} V}{dt^{m_1}} + N_1 \frac{d^{n_1} V}{dt^{n_1}} + P_1 \frac{d^{p_1} V}{dt^{p_1}} + \text{etc.}$$

En effet, si l'on différentie séparément m_1 fois, n_1 fois, p_1 fois, etc.,

l'équation (1), il viendra

$$\begin{aligned} (a) \quad & M \frac{d^{m+m_1} \gamma}{dt^{m+m_1}} + N \frac{d^{n+m_1} \gamma}{dt^{n+m_1}} + P \frac{d^{p+m_1} \gamma}{dt^{p+m_1}} + \text{etc.} = \frac{d^{n_1} V}{dt^{m_1}}, \\ (b) \quad & M \frac{d^{m+n_1} \gamma}{dt^{m+n_1}} + N \frac{d^{n+n_1} \gamma}{dt^{n+n_1}} + P \frac{d^{p+n_1} \gamma}{dt^{p+n_1}} + \text{etc.} = \frac{d^{n_1} V}{dt^{m_1}}, \\ (c) \quad & M \frac{d^{m+p_1} \gamma}{dt^{m+p_1}} + N \frac{d^{n+p_1} \gamma}{dt^{n+p_1}} + P \frac{d^{p+p_1} \gamma}{dt^{p+p_1}} + \text{etc.} = \frac{d^{p_1} V}{dt^{p_1}}, \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Je multiplie l'équation (a) par M_1 , l'équation (b) par N_1 , l'équation (c) par P_1 , etc., et j'ajoute ensuite membre à membre toutes ces équations: en écrivant les uns à la suite des autres tous les termes contenus dans la même colonne verticale et observant que la somme des termes de chacune de ces colonnes peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & M \frac{d^m}{dt^m} \left(M_1 \frac{d^{m_1} \gamma}{dt^{m_1}} + N_1 \frac{d^{n_1} \gamma}{dt^{n_1}} + P_1 \frac{d^{p_1} \gamma}{dt^{p_1}} + \text{etc.} \right), \\ & N \frac{d^n}{dt^n} \left(M_1 \frac{d^{m_1} \gamma}{dt^{m_1}} + N_1 \frac{d^{n_1} \gamma}{dt^{n_1}} + P_1 \frac{d^{p_1} \gamma}{dt^{p_1}} + \text{etc.} \right), \\ & P \frac{d^p}{dt^p} \left(M_1 \frac{d^{m_1} \gamma}{dt^{m_1}} + N_1 \frac{d^{n_1} \gamma}{dt^{n_1}} + P_1 \frac{d^{p_1} \gamma}{dt^{p_1}} \right), \\ & \text{etc.,} \end{aligned}$$

ou bien

$$M \frac{d^m V_1}{dt^m}, \quad N \frac{d^n V_1}{dt^n}, \quad P \frac{d^p V_1}{dt^p}, \text{ etc.,}$$

on aura donc

$$M \frac{d^m V_1}{dt^m} + N \frac{d^n V_1}{dt^n} + P \frac{d^p V_1}{dt^p} + \text{etc.} = M_1 \frac{d^{m_1} V}{dt^{m_1}} + N_1 \frac{d^{n_1} V}{dt^{n_1}} + P_1 \frac{d^{p_1} V}{dt^{p_1}} + \text{etc.,}$$

comme on l'avait annoncé.

II.

Si les deux équations proposées sont linéaires en x et y , et ne contiennent que ces deux variables et la variable indépendante t , on pourra former à volonté par le moyen précédent l'équation finale en y ou en x , et, chose remarquable, ces deux équations finales diffé-

sont seulement par le terme fonction de t qui ne contiendra que cette dernière variable. On peut vérifier cette proposition sur l'exemple suivant, et il serait facile de la démontrer en général.

Soient les deux équations

$$M \frac{d^m x}{dt^m} + N \frac{d^n x}{dt^n} = T - P \frac{d^p x}{dt^p} - Q \frac{d^q x}{dt^q},$$

$$M_1 \frac{d^{m_1} y}{dt^{m_1}} + N_1 \frac{d^{n_1} y}{dt^{n_1}} = T_1 - P_1 \frac{d^{p_1} x}{dt^{p_1}} - Q_1 \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}}.$$

En éliminant successivement x et y , on peut remplacer ces équations par les suivantes

$$\begin{aligned} & \left(M \frac{d^m}{dt^m} + N \frac{d^n}{dt^n} \right) \left(T_1 - P_1 \frac{d^{p_1} x}{dt^{p_1}} - Q_1 \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} \right) \\ &= \left(M_1 \frac{d^{m_1}}{dt^{m_1}} + N_1 \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}} \right) \left(T - P \frac{d^p x}{dt^p} - Q \frac{d^q x}{dt^q} \right), \\ & \left(P \frac{d^p}{dt^p} + Q \frac{d^q}{dt^q} \right) \left(T_1 - M_1 \frac{d^{m_1} y}{dt^{m_1}} - N_1 \frac{d^{n_1} y}{dt^{n_1}} \right) \\ &= \left(P_1 \frac{d^{p_1}}{dt^{p_1}} + Q_1 \frac{d^{q_1}}{dt^{q_1}} \right) \left(T - M \frac{d^m y}{dt^m} - N \frac{d^n y}{dt^n} \right). \end{aligned}$$

Celles-ci développées donnent

$$\begin{aligned} A) \quad & \left\{ \begin{aligned} & PM_1 \frac{d^{p+m_1} x}{dt^{p+m_1}} + QM_1 \frac{d^{q+m_1} x}{dt^{q+m_1}} + PN_1 \frac{d^{p+n_1} x}{dt^{p+n_1}} + QN_1 \frac{d^{q+n_1} x}{dt^{q+n_1}} \\ & - \left(MP_1 \frac{d^{m+p_1} x}{dt^{m+p_1}} + MQ_1 \frac{d^{m+q_1} x}{dt^{m+q_1}} + NP_1 \frac{d^{n+p_1} x}{dt^{n+p_1}} + NQ_1 \frac{d^{n+q_1} x}{dt^{n+q_1}} \right) \\ & = M_1 \frac{d^{m_1} T}{dt^{m_1}} + N_1 \frac{d^{n_1} T}{dt^{n_1}} - \left(M \frac{d^{m_1} T_1}{dt^{m_1}} + N \frac{d^{n_1} T_1}{dt^{n_1}} \right), \end{aligned} \right. \\ B) \quad & \left\{ \begin{aligned} & PM_1 \frac{d^{p+m_1} y}{dt^{p+m_1}} + QM_1 \frac{d^{q+m_1} y}{dt^{q+m_1}} + PN_1 \frac{d^{p+n_1} y}{dt^{p+n_1}} + QN_1 \frac{d^{q+n_1} y}{dt^{q+n_1}} \\ & - \left(MP_1 \frac{d^{m+p_1} y}{dt^{m+p_1}} + MQ_1 \frac{d^{m+q_1} y}{dt^{m+q_1}} + NP_1 \frac{d^{n+p_1} y}{dt^{n+p_1}} + NQ_1 \frac{d^{n+q_1} y}{dt^{n+q_1}} \right) \\ & = P_1 \frac{d^{p_1} T}{dt^{p_1}} + Q_1 \frac{d^{q_1} T}{dt^{q_1}} - \left(P \frac{d^{p_1} T_1}{dt^{p_1}} + Q \frac{d^{q_1} T_1}{dt^{q_1}} \right); \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

égalités qui ne diffèrent que par les termes fonctions de t seulement, et pour lesquelles par conséquent, dans le cas des équations différentielles à indices entiers et positifs, sera applicable la même formule

PURES ET APPLIQUÉES.

générale d'intégration, en sorte que les valeurs de x et de y seront de la forme

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t} + C_3 e^{\mu_3 t} + \text{etc.}, \\ y &= C'_1 e^{\mu_1 t} + C'_2 e^{\mu_2 t} + C'_3 e^{\mu_3 t} + \text{etc.}; \end{aligned}$$

$C_1, C_2, \text{etc.}$, étant des fonctions de t que l'on saura déterminer par les méthodes connues, dans chaque cas particulier, et les quantités $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \text{etc.}$, étant déterminées par l'équation commune

$$PM_1 \mu^{p+m_1} + QM_1 \mu^{q+m_1} + \text{etc.} = 0.$$

III.

Si l'on a m équations entre $m+1$ variables, à coefficients constants pour toutes ces variables moins une qui sera la variable indépendante, il suffira, pour éliminer l'une d'elles, d'ordonner le premier membre de chaque équation par rapport à ses coefficients différentiels après avoir fait passer tous les autres termes dans le second membre. On comparera ensuite l'une quelconque de ces équations avec les $m-1$ autres. On formera ainsi $m-1$ couples d'équations entre lesquelles on éliminera la variable en question, comme il a été dit ci-dessus, et l'on n'aura plus que $m-1$ équations entre m variables. En continuant de la même manière, on arrivera à une équation entre deux variables seulement. On conçoit qu'il sera dès lors facile, par ce procédé, de remplacer les m équations proposées par m autres équations dans chacune desquelles entreront seulement la variable indépendante et l'une des autres variables qu'il s'agit de déterminer.

IV.

D'après ce qui précède on peut conclure *a priori* l'ordre de l'équation finale. Si, par exemple, on a m équations du premier ordre, le procédé indiqué conduira à $m-1$ équations du second ordre, et de là à $m-2$ équations du troisième ordre, et enfin à $m-(m-1)$, ou une équation du $m^{\text{ième}}$ ordre; et en général si $m, n, p, \text{etc.}$, sont les plus forts indices de différentiation pour chaque variable,

$m+n+p+\text{etc.}$, sera le nombre indiquant l'ordre de chaque équation finale.

V.

Tout ce qui a été établi ci-dessus l'ayant été indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux indices m, n, p, q , etc., sera dès lors vrai, quels qu'ils soient, et conviendra par conséquent au cas des équations différentielles à indices quelconques. On n'aurait pu arriver à ce résultat par les méthodes ordinaires, qui reposent sur la différentiation sous forme finie d'un produit tel que θx de deux variables, ce qu'on ne peut supposer pour des différentielles à indices quelconques. Cette méthode a aussi l'avantage de dispenser du recours à des variables auxiliaires, et n'exige que des opérations fort simples d'addition et de soustraction. Enfin elle pourrait s'appliquer également bien aux équations linéaires à coefficients constants dans le calcul aux différences finies.
