

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-M. FAVRE-ROLLIN

Intégration de l'équation $\frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}} + \frac{Pd^ny}{dx^n} + \frac{Qd^ny}{dx^n} + \text{etc.} = V$, dans laquelle on suppose p, q, m, n , etc., des nombres entiers; P, Q , etc. des coefficients constants et V une fonction quelconque de la variable indépendante x .

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 1 (1836), p. 339-340.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1_339_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Intégration de l'équation $\frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}} + \frac{Pd^{\frac{n}{q}}y}{dx^{\frac{m}{q}}} + \frac{Qd^{\frac{n}{q}}y}{dx^{\frac{n}{q}}} + \text{etc.} = V,$

dans laquelle on suppose $p, q, m, n, \text{ etc.}$, des nombres entiers; $P, Q, \text{ etc.}$ des coefficients constans et V une fonction quelconque de la variable indépendante x ;

PAR A.-M. FAVRE-ROLLIN (*).

Pour plus de simplicité, nous supposons qu'il y a dans le premier membre de l'équation proposée trois termes seulement: le lecteur verra sans peine que notre méthode reste la même quel que soit le nombre des termes de ce premier membre.

Soit donc l'équation $\frac{d^{\frac{p}{q}}y}{dx^{\frac{p}{q}}} + \frac{Pd^{\frac{n}{q}}y}{dx^{\frac{m}{q}}} + \frac{Qd^{\frac{n}{q}}y}{dx^{\frac{n}{q}}} = V. \quad (1)$

Je prends la différentielle à indice $\frac{p}{q}$ de chaque membre, et je trouve

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}} + \frac{Pd^{\frac{m+\frac{p}{q}}{q}}y}{dx^{\frac{m+\frac{p}{q}}{q}}} + \frac{Qd^{\frac{n+\frac{p}{q}}{q}}y}{dx^{\frac{n+\frac{p}{q}}{q}}} = \frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}},$$

ce qui revient à

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}}y}{dx^{\frac{2p}{q}}} + \left(\frac{Pd^{\frac{m}{q}}}{dx^{\frac{m}{q}}} + \frac{Qd^{\frac{n}{q}}}{dx^{\frac{n}{q}}} \right) \frac{d^{\frac{p}{q}}y}{dx^{\frac{p}{q}}} = \frac{d^{\frac{p}{q}}V}{dx^{\frac{p}{q}}}. \quad (2)$$

Substituant dans l'équation (2) la valeur de $d^{\frac{p}{q}}y$ tirée de l'équation (1), on a

(*) J'ai traité cette question et d'autres plus générales dans un Mémoire destiné au prochain cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*. (J. LIOUVILLE.)

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}} y}{dx^{\frac{2p}{q}}} + \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right) \left(V - P \frac{d^m y}{dx^m} - \frac{Qd^n y}{dx^n} \right) = \frac{d^{\frac{p}{q}} V}{dx^{\frac{p}{q}}},$$

ou bien

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}} y}{dx^{\frac{2p}{q}}} - \left(P \frac{d^{2m} y}{dx^{2m}} + 2PQ \frac{d^{m+n} y}{dx^{m+n}} + Q \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} \right) = \frac{d^{\frac{p}{q}} V}{dx^{\frac{p}{q}}} - \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right) V,$$

équation que je mets sous la forme

$$\frac{d^{\frac{2p}{q}} y}{dx^{\frac{2p}{q}}} - \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right)^2 = \frac{d^{\frac{p}{q}} V}{dx^{\frac{p}{q}}} - \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right) V, \quad (3)$$

en observant que les exposants du développement de $\left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right)^2$, par rapport aux quantités $\frac{d^m y}{dx^m}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ devront porter sur les indices de différentiation, et non sur ces quantités elles-mêmes, et indiqueront combien de fois les indices m et n doivent être répétés et non combien de fois $\frac{d^m y}{dx^m}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ doivent être multipliés par eux-mêmes.

Traitant l'équation (3), comme on a traité l'équation (1), on arrivera facilement à la nouvelle équation

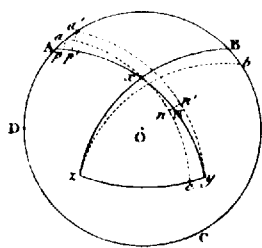
$$\frac{d^{\frac{3p}{q}} y}{dx^{\frac{3p}{q}}} + \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right)^3 = \frac{d^{\frac{2p}{q}} V}{dx^{\frac{2p}{q}}} - \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right) \frac{d^{\frac{p}{q}} V}{dx^{\frac{p}{q}}} + \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right)^2 V.$$

En continuant ainsi l'on aura, si q est un nombre entier, l'équation finale

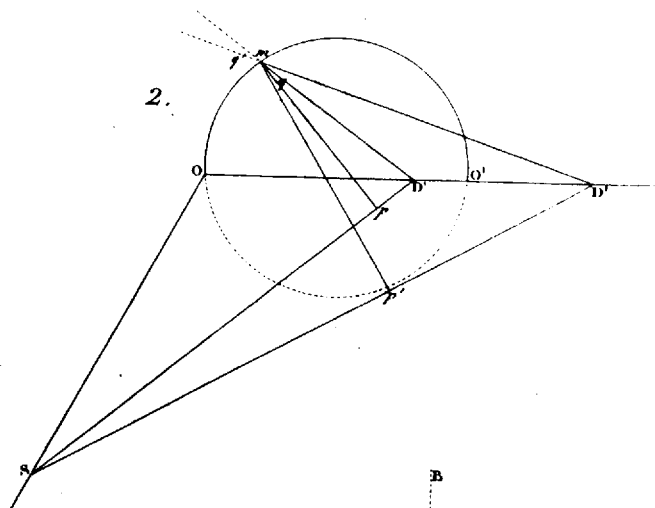
$$\frac{d^{\frac{p}{q}} y}{dx^{\frac{p}{q}}} \pm \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right)^q = \begin{cases} \frac{d^{(q-1)\frac{p}{q}} V}{dx^{(q-1)\frac{p}{q}}} - \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right) \frac{d^{(q-2)\frac{p}{q}} V}{dx^{(q-2)\frac{p}{q}}} + \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right)^2 \frac{d^{(q-3)\frac{p}{q}} V}{dx^{(q-3)\frac{p}{q}}} + \dots \\ \dots \pm \left(\frac{Pd^m}{dx^m} + \frac{Qd^n}{dx^n} \right)^{q-1} V \end{cases}$$

facile à intégrer, puisque la variable y n'est plus affectée de différentielles à indices fractionnaires. (Le signe $+$ devra être pris si q est impair, et le signe $-$ devra l'être si q est pair.)

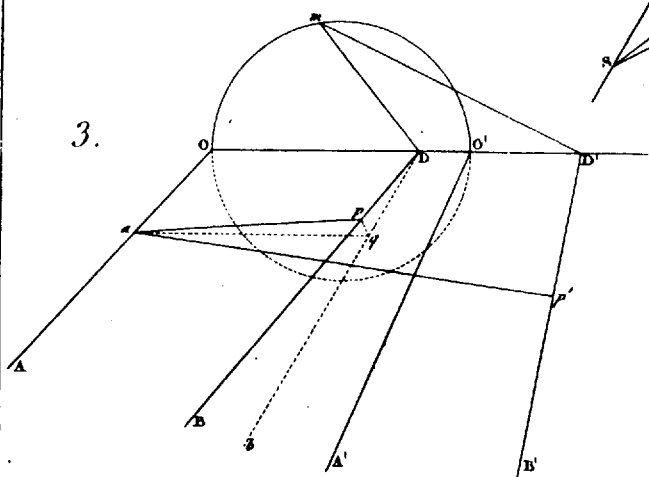
Fig. 1.



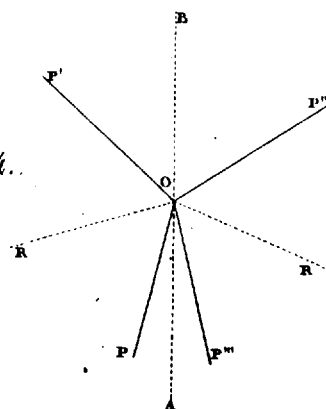
2.



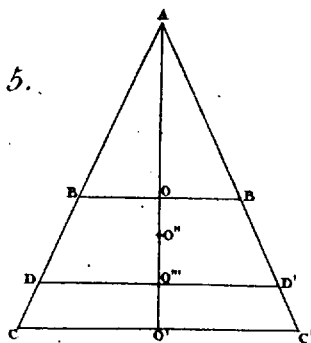
3.



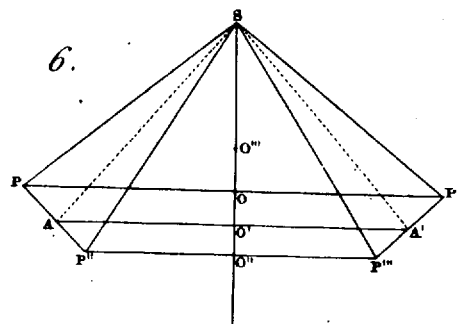
4.



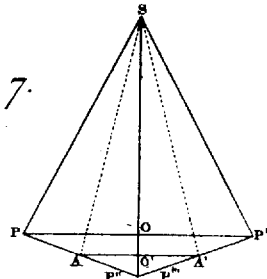
5.



6.



7.



8.

