Journées Équations aux dérivées partielles

Emmanuel Grenier

Couches limites de systèmes paraboliques

Journées Équations aux dérivées partielles (1996), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1996____A8_0>

Couches limites de systèmes paraboliques

E. Grenier

Laboratoire d'Analyse Numérique, CNRS - URA 189,
Université Paris 6, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05,

Cette note présente différentes études de couches limites pour des systèmes paraboliques quasilinéaires dans un domaine à bord, lorsque la viscosité tend vers zéro. On discute en particulier la notion de bord caractéristique et non caractéristique dans le cadre quasilinéaire.

1 Introduction

On se propose d'étudier la limite quand $\varepsilon > 0$ tend vers zéro du système parabolique quasilinéaire suivant

$$\partial_t u^\varepsilon + \sum_{i=1}^{d} A_i(t,x,u^\varepsilon)\partial_i u^\varepsilon - \varepsilon \Delta u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon \tag{3}$$

où u^ε est un vecteur de $\mathbb{R}^{d'}$, les A_i sont des matrices symétriques qui dépendent de façon C^∞ de t, x et de u^ε, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ à bord régulier, et où u_0^ε est une famille de fonctions régulières vérifiant (3). Par des changements de coordonnées, on se ramène au cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ qui ne pose pas de problèmes, et au cas $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$ que nous allons étudier maintenant.

Le cas linéaire (A_i indépendants de u^ε) a été étudié en particulier par O. Guès et on renvoie à [5] pour la construction et la justification d'un développement formel.

Dans le cas général, on s'attend à ce que la solution u^ε converge fortement dans $L^2(\Omega)$ (et en fait dans tout espace qui ne "voit" pas les conditions aux limites) vers u^0, solution du système hyperbolique limite

$$\partial_t u^0 + \sum_{i=1}^{d} A_i(t,x,u^0)\partial_i u^0 = 0. \tag{4}$$

Un premier problème est de savoir quelle condition aux limites on récupère sur (4).

On s'attend de plus à ce que u^ε présente un comportement de type "couche limite" près du bord, c'est-à-dire que u^ε se mette à varier très rapidement près de $\partial\Omega$, sur des longueurs de l'ordre de λ, qui tend vers zéro avec ε. Un deuxième problème est de déterminer la taille de la couche limite, et d'obtenir des équations la décrivant. Dans le cas linéaire, on a soit $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ (le bord est alors dit caractéristique), soit $\lambda = \varepsilon$ (le bord est alors dit noncaractéristique). Dans le cas nonlinéaire, la situation est plus complexe : la couche limite peut ne pas exister ou ne pas être stable.

On trouvera une étude complète du cas linéaire dans [5]. Dans le cas nonlinéaire, en dimension 1 d'espace, des éléments de réponse importants à ces deux problèmes se trouvent dans [2].

2 Taille de la couche limite

Dans le cas linéaire et $d' = 1$ (pour simplifier l'exposé), la couche limite est caractéristique et d'épaisseur d'ordre $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ si $A_1(t,x) = 0$ sur le bord et non caractéristique ($\lambda = \varepsilon$) si $A_1(t,x) \neq 0$ sur le bord. On peut penser que cette condition se généralise au cas nonlinéaire, et que $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ si $A_1(t,x,0) = 0$ sur le bord ($u^\varepsilon = 0$ sur le bord). Ce n'est pas le cas comme le prouve l'exemple simple suivant : soit l'équation de Bürgers

$$\partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \partial_x u^\varepsilon - \varepsilon \partial_{xx}^2 u^\varepsilon = 0, \tag{5}$$

$$u^\varepsilon(t,0) = 0, \tag{6}$$

sur $\Omega =]0,+\infty[$, qui est bien de la forme (1,2) avec $A_1(t,x,v) = v$. On montre ([2],[4]) qu'il existe $T > 0$ tel que u_0^ε converge fortement dans $L^\infty([0,T], L^2(\Omega))$ vers u^0, solution de

$$\partial_t u^0 + u^0 \partial_x u^0 = 0, \tag{7}$$

$$u^0(t,0) \leq 0. \tag{8}$$

De plus, si $u^0(t,0) < 0$ pour tout $0 \leq t \leq T$, la couche limite est d'épaisseur ε.

(Cet énoncé, volontairement vague sera précisée dans les prochains paragraphes.) Notons que la condition aux limites $u^0(t,0) \leq 0$ est non habituelle et dit que u ne peut que "sortir" de Ω. La taille de la couche limite dépend de plus de la solution limite elle-même et non simplement de propriétés des A_i.

Cette remarque motive la définition suivante : on dit que le bord est "uniformément caractéristique" si

$$\text{(H)} \qquad A_1(t,x,u) = 0 \quad \text{pour tous} \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0, u \in \mathbb{R}^{d'}$$

($\partial\Omega = \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d, x_1 = 0\}$), ou de façon équivalente

$$A_1(t,x,u) = \phi(x_1)\tilde{A}_1(t,x,u)$$

où $\tilde{A}_1$ est une fonction régulière et

$$\phi(x_1) = \frac{x_1}{1+x_1}.$$

3 Couches limites caractéristiques

On se limite au cas de bords uniformément caractéristiques en faisant dans tout ce paragraphe l'hypothèse (H). L'étude comporte deux parties : construction d'une solution asymptotique approchée et justification du développement.

3.1 Solutions approchées

On suppose que les données initiales ont un développement asymptotique au sens suivant : pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe des fonctions $u^i_{b,0}$ et $u^i_{r,0}$ de classe $H^s(\Omega)$ pour tout $s \geq 0$, les $u^i_{b,0}$ étant à décroissance rapide en x_1, telles que

$$||u^\varepsilon_0(x_1,...,x_d) - \sum_{i=0}^{N} \sqrt{\varepsilon}^i u^i_{r,0}(x_1,...,x_d) - \sum_{i=0}^{N} \sqrt{\varepsilon}^i u^i_{b,0}(\frac{x_1}{\sqrt{\varepsilon}},...,x_d)||_{H^s} \leq C\sqrt{\varepsilon}^{N-s}$$

pour tous N et $s \leq N$. On se donne de plus une solution u^0_r du système hyperbolique non linéaire suivant

$$\partial_t u^0_r + \sum_{i=1}^{d} A_i(t,x,u^0_r)\partial_i u^0_r = 0, \qquad u^0_r(t=0) = u^0_{r,0} \tag{9}$$

sans conditions aux bords puisque par (H), $A_1(t,x,u^0_r) = 0$ sur $\partial\Omega$. La construction d'une solution approchée part d'une solution $u^0_r \in L^\infty([0,T], H^s(\Omega))$ (pour tout s) de (9) ([6]).

Théorème 3.1 *Il existe $0 < T' \leq T$ et des fonctions u^i_r et u^i_b dans $L^\infty([0,T'], H^s(\Omega))$ pour tout s, les fonctions u^i_b étant à décroissance rapide, vérifiant*

$$u^i_r(0,x_1,...,x_d) = u^i_{r,0}(x_1,...,x_d) \tag{10}$$

pour tous x_1,...,x_d et de même pour u^i_b, telles que

$$u^{\varepsilon,N}(t,x_1,...,x_d) = \sum_{i=0}^{N} \sqrt{\varepsilon}^i u^i_r(t,x_1,...,x_d) + \sum_{i=0}^{N} \sqrt{\varepsilon}^i u^i_b(t,\frac{x_1}{\sqrt{\varepsilon}},...,x_d), \tag{11}$$

soit une solution approchée de (1,2) au sens suivant :

$$u^{\varepsilon,N} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega, \tag{12}$$

$$\partial_t u^{\varepsilon,N} + \sum_{i=1}^{d} A_i(t,x,u^{\varepsilon,N})\partial_i u^{\varepsilon,N} - \varepsilon\Delta u^{\varepsilon,N} = \sigma^{\varepsilon,N}, \tag{13}$$

avec, pour $s < N$,

$$||\sigma^{\varepsilon,N}||_{L^\infty(H^s)} \leq C\sqrt{\varepsilon}^{N-s} \quad pour \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \tag{14}$$

Idée de la preuve

Commençons par u_b^0 qui décrit la couche limite au premier ordre et qui est solution de l'équation parabolique non linéaire suivante

$$\partial_t u_b^0 + x_1 \tilde{A}_1(t,0,y,u_{\partial\Omega}^0 + u_b^0)\partial_1 u_b^0 + \sum_{i=2}^{d} A_i(t,0,y,u_{\partial\Omega}^0 + u_b^0)\partial_i u_b^0 - \partial_1^2 u_b^0$$

$$= \sum_{i=1}^{d} [A_i(t,0,y,u_{\partial\Omega}^0) - A_i(t,0,y,u_{\partial\Omega}^0 + u_b^0)]\partial_i u_r^0(t,0,y), \qquad (15)$$

où $y = (x_2, ..., x_d)$ et $u_{\partial\Omega}^0(t,y) = u_r^0(t,0,y)$,

$$u_b^0 = -u_{\partial\Omega}^0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad u_b^0 = 0 \quad \text{quand} \quad x_1 \to +\infty, \qquad (16)$$

et où $u_b^0(t=0) = u_{b,0}^0$. Ce système a été étudié dans [5] dans le cas linéaire. L'existence d'une solution à (15,16) résulte d'estimations d'énergie, sur les normes

$$|||u_b^0|||_{\alpha,\beta,\gamma}^2 = \int_\Omega x_1^{2\alpha+2n} |\partial_1^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma u_b^0|^2 \qquad (17)$$

où $n \geq 0$ et $\beta = (\beta_2, ..., \beta_d)$. L'indice n permet de contrôler la décroissance rapide de u_b^0, et l'indice γ permet en exprimant $\partial_1^2 u_b^0$ grâce à l'équation de retrouver un peu de contrôle sur les normes Sobolev de u_b^0. L'équation étant non linéaire, on n'obtient a priori l'existence que sur un intervalle de temps $[0,T']$ avec $T' \leq T$.

Les fonctions u_r^i et u_b^i pour $i \geq 1$ sont solutions d'équations linéaires et ne posent pas de problèmes particuliers.

3.2 Stabilité

Il reste à montrer qu'il existe une « vraie solution » proche de $u^{\varepsilon,N}$.

Théorème 3.2 *Soit $u^{\varepsilon,N}$ une suite de solutions approchées sur $[0,T']$ au sens du Théorème 3.1. Alors si N est assez grand, il existe, pour ε assez petit, une suite u^ε de solutions de (1,2) sur $[0,T']$, proches de $u^{\varepsilon,N}$ au sens où*

$$||u^{\varepsilon,N} - u^\varepsilon||_{L^\infty(H^{s^*})} \leq C_{s^*,n} \sqrt{\varepsilon}^{n'} \qquad (18)$$

avec s^*, n' qui tendent vers l'infini quand N tend vers l'infini.

Idée de la preuve

La preuve repose sur une estimation d'énergie sur $w^\varepsilon = u^{\varepsilon,N} - u^\varepsilon$, pour les normes

$$||z||_{\alpha,\beta,\gamma}^2 = \int_\Omega \phi(x_1)^{2\alpha} |\partial_1^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma z|^2. \qquad (19)$$

L'idée centrale est que pour $i \geq 2$

$$|\partial_1^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma A_i(t,x,u^{\varepsilon,N})| \leq C + C|\sqrt{\varepsilon}|^{-\alpha}\Theta(\frac{x_1}{\sqrt{\varepsilon}}) \tag{20}$$

alors que

$$|\partial_1^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma A_1(t,x,u^{\varepsilon,N})| \leq C + C|\sqrt{\varepsilon}|^{-\alpha+1}\Theta(\frac{x_1}{\sqrt{\varepsilon}}) \tag{21}$$

et

$$|\partial_y^\beta \partial_t^\gamma A_1(t,x,u^{\varepsilon,N})| \leq \inf(Cx_1, C), \tag{22}$$

où Θ est une fonction à décroissance rapide.

Le gain d'un facteur $\sqrt{\varepsilon}$ (ou d'un facteur x_1) pour A_1 permet de faire des estimations d'énergie uniformes (sans grands coefficients $1/\sqrt{\varepsilon}$) sur la partie « linéaire » de l'équation sur w^ε. Par exemple pour estimer

$$I = \int_\Omega \phi^{2\alpha} \partial_1^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon A_1(t,x,u^{\varepsilon,N}) \partial_1^{\alpha+1} \partial_y^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon, \tag{23}$$

on intègre par parties en utilisant $\phi = 0$ et $\partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$ (pour tous β et γ), et la symétrie de A_1 pour obtenir

$$|I| \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\partial_1^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon|^2 |\partial_1(A_1\phi^{2\alpha})|. \tag{24}$$

Mais $|\partial_1 A_1|_{L^\infty} \leq C$ et $|A_1| \leq C\phi(x_1)$ donc

$$|\partial_1(A_1\phi^{2\alpha})| \leq C\phi^{2\alpha} \tag{25}$$

et

$$|I| \leq C||w^\varepsilon||^2_{\alpha,\beta,\gamma}. \tag{26}$$

Les termes non linéaires peuvent être contrôlés car, à $t = 0$, w^ε est d'ordre $\sqrt{\varepsilon}^N$ et car $|w^\varepsilon|_{L^\infty}$ peut être majoré (au prix de perte de facteurs $1/\sqrt{\varepsilon}$) par $\sum_{\alpha+|\beta|+\gamma=s} ||w^\varepsilon||_{\alpha,\beta,\gamma}$ pour s grand en exprimant $\varepsilon\Delta w^\varepsilon$ dans (1).

4 Couches limites noncaractéristiques

"Noncaractéristique" veut dire ici qu'on s'attend à ce que la couche limite soit d'épaisseur ε. En fait la situation peut être fort complexe et la couche limite peut être instable ou même ne pas exister.

4.1 Développement formel

On cherche une solution approchée de la forme

$$u^{\varepsilon,N}(t,x_1,...,x_d)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i u_r^i(t,x_1,...,x_d)+\varepsilon^i u_b^i(t,\frac{x_1}{\varepsilon},x_2,...,x_d), \tag{27}$$

où les u_r^i et u_b^i sont des fonctions régulières (dans $L^\infty([0,T],H^s(\Omega))$ pour tout $s\geq 0$), les u_b^i étant à décroissance rapide en x_1. Les problèmes de trouver une équation sur u_b^0 et de trouver la condition aux limites à mettre sur (4) sont très liés. Par des arguments de dimension, on s'attend à ce que u_b^0 vérifie

$$A_1(t,x,u_r^0(t,0,x_2,...,x_d)+u_b^0)\partial_1 u_b^0=\partial_{11}^2 u_b^0 \tag{28}$$

$$u_b^0(t,+\infty,x_2,...,x_d)=0, \qquad u_b^0(t,0,x_2,...,x_d)=-u^0(t,0,x_2,...,x_d). \tag{29}$$

A noter que t et $x_2,...,x_d$ ne sont que des paramètres, et que (28) est une équation différentielle ordinaire.

On définit, en suivant [2], $\mathcal{C}_{t,x}$, ensemble des $w\in\mathbb{R}^{d'}$ tels que le système suivant ait une solution

$$A_1(t,x,w+v)\partial_1 v=\partial_1^2 v, \tag{30}$$

$$v\to 0 \quad \text{quand} \quad x_1\to+\infty, \quad v(0)=-w. \tag{31}$$

Par définition, (28,29) a une solution si et seulement si $u^0(t,0,x_2,...,x_d)\in\mathcal{C}_{t,0,x_2,...,x_d}$. C'est précisement cette condition aux limites que l'on met sur (4): le système limite est alors

$$\partial_t u_r^0+\sum_{i=1}^{d}A_i(t,x,u_r^0)\partial_i u_r^0=0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{32}$$

$$u_r^0\in\mathcal{C}_{t,x} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \tag{33}$$

Remarques

- Dans le cas linéaire, la condition aux bords qui apparaît est

$$P_+u_r^0=0 \tag{34}$$

  où P_+ est la projection sur l'espace E_+ des vecteurs propres de A_1, de valeurs propres strictement positive. La condition (33) en est une généralisation non linéaire: $\mathcal{C}$ est une variété de dimension $dim(E_+)$ au voisinage de 0 (qui est toujours dans $\mathcal{C}$). Dans le cas de données aux bords petites, cela permet (O. Guès [7],[4]) de construire une solution approchée (analogue du Théorème 3.1 dans le cas noncaractéristique).

- Dans le cas $d = d' = 1$, on n'a pas toujours $\mathcal{C} = \{0\}$ ou $\mathbb{R}$ (prendre par exemple $A_1(u) = \sin u$). Si $u^0(t,x)$ n'est pas dans $\mathcal{C}$ pour un certain $x \in \partial\Omega$, il n'existe pas de couche limite u_b^0 de taille ε qui puisse relier $u^0(t,x)$ à zéro, et l'Ansatz (27) est faux (apparition d'un temps rapide t/ε dans la couche limite).
- On peut aussi construire [7] des cas où, avec des données grandes au bord, il existe un développement formel de type (27) qui soit instable en des temps de l'ordre de ε.

4.2 Stabilité

Enonçons [4] un Théorème similaire au Théorème 3.2 dans un cadre non dégénéré (qui en particulier ne contient pas la limite nonvisqueuse de Bürgers).

Théorème 4.1 *Soit Θ une fonction à décroissance rapide. Soit $u^{\varepsilon,N}$ une suite de solutions approchées sur $[0,T]$ telle que pour $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \leq s$ et $i \leq N$,*

$$|\partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma u_b^i(t, x_1, ..., x_d)| \leq C_i \Theta(x_1). \tag{35}$$

Supposons de plus (hypothèse de non dégénerescence) que

$$|\ det\ A_1(t, x, u^{\varepsilon,N})| \geq \alpha > 0. \tag{36}$$

ou de façon équivalente

$$|\ det\ A_1(t, x, u^{\varepsilon,0})| \geq \frac{\alpha}{2} > 0. \tag{37}$$

Alors, si N et s sont assez grands, et si C_0 est assez petit, pour ε assez petit, il existe une solution u^ε de (1,2) sur $[0,T]$, telle que

$$||u^{\varepsilon,N} - u^\varepsilon||_{L^\infty(H^{s'})} \leq C\varepsilon^{N'} \tag{38}$$

avec s' et N' qui tendent vers $+\infty$ quand s et N tendent vers $+\infty$.

Idée de la preuve

La preuve, comme celle du Théorème 3.2, repose sur l'estimation de $w^\varepsilon = u^{\varepsilon,N} - u^\varepsilon$, pour les normes $||w||^2_{\alpha,\beta,\gamma}$ définies par (19). Toutefois ici (21) est faux et on est conduit à découper Ω en bandes dyadiques

$$\Omega_i = \{2^i\varepsilon \leq x_1 \leq 2^{i+1}\varepsilon\}.$$

Soit par exemple à borner

$$I_1 = \int \phi^{2\alpha} \partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon A_1(t, x, u^{\varepsilon,N}) \partial_1 \partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon.$$

Par intégration par parties, en utilisant $\phi = 0$, $\partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon = 0$ pour tous $\beta, \gamma \geq 0$ sur $\partial\Omega$, et la symétrie de A_1, on obtient

$$|I_1| \leq \frac{1}{2} \int |\partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon|^2 |\partial_1(\phi^{2\alpha} A_1(t, x, u^{\varepsilon,N}))|. \tag{39}$$

Mais pour $x_1 \leq 1$,

$$\phi^\alpha \partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon(t, x_1, y) = \int_0^{x_1} \phi^\alpha(\tilde{x}_1) \partial_1^{\alpha+1} \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon(t, \tilde{x}_1, y) d\tilde{x}_1$$

$$+\alpha \int_0^{x_1} \phi^{\alpha-1}(\tilde{x}_1) \partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon(t, \tilde{x}_1, y) \phi'(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1.$$

Notons que si f et g sont deux fonctions telles que

$$f(x_1, y) = \int_0^{x_1} g(\tilde{x}_1, y) d\tilde{x}_1, \tag{40}$$

on a pour $x \leq 1$,

$$||f||_{L^2([0,x] \times \mathbb{R}^{d-1})} \leq Cx ||g||_{L^2([0,1] \times \mathbb{R}^{d-1})}. \tag{41}$$

Donc, pour $n \in \mathbb{Z}$, et $2^n \varepsilon < 1$,

$$||\phi^\alpha \partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon||_{L^2([2^n\varepsilon, 2^{n+1}\varepsilon] \times \mathbb{R}^{d-1})} \leq C \frac{2^n \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} ||\sqrt{\varepsilon} \phi^\alpha \partial_1^{\alpha+1} \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon||_{L^2(\Omega)}$$

$$+C \frac{2^n \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} ||\sqrt{\varepsilon} \phi^{\alpha-1} \partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon||_{L^2(\Omega)},$$

d'où par exemple la majoration

$$\int_0^1 |\phi^\alpha \partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon|^2 |\partial_1 A_1(t, x, u^{\varepsilon,N})| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}, 2^n\varepsilon \leq 1} \int_{2^n\varepsilon}^{2^{n+1}\varepsilon} |\partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon|^2 \phi^{2\alpha} |\partial_1 A_1|$$

$$\leq C \Big[||\sqrt{\varepsilon} \phi^{\alpha-1} \partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon||_{L^2} + ||\sqrt{\varepsilon} \phi^\alpha \partial_1^{\alpha+1} \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon||_{L^2} \Big]^2 C_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(2^n \sqrt{\varepsilon})^2}{\varepsilon} \Theta(2^n).$$

Comme Θ est rapidement décroissante, la série converge (l'intégrale entre 1 et $+\infty$ ne pose pas de problèmes). On contrôle alors $C_0[||\sqrt{\varepsilon}\phi^{\alpha-1}\partial_1^\alpha \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon||_{L^2(\Omega)} + ||\sqrt{\varepsilon}\phi^\alpha \partial_1^{\alpha+1} \partial_2^\beta \partial_t^\gamma w^\varepsilon||_{L^2(\Omega)}]^2$ par la viscosité, ce qui est possible uniquement si C_0 est suffisamment petit. L'hypothèse de petitesse des valeurs au bord de u_r^0 qui apparaît dans la construction de la solution approchée est donc aussi cruciale dans la preuve de la stabilité.

Références

[1] C. Bardos, J. Rauch : Maximal positive boundary value problems as limits of singular perturbation problems, Trans. Amer. Math. Soc., 270, (1982), 377-408.

[2] M. Gisclon, D. Serre : Etude des conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique, via l'approximation parabolique, C.R.Acad.Sci.Paris, t. 319, Série I, 1994, p 377-382, et M. Gisclon, thèse de doctorat, Lyon, 1995.

[3] E. Grenier : Boundary layers of characteristic nonlinear parabolic equations, preprint

[4] E. Grenier, O. Guès : On the inviscid limit of noncharacteristic nonlinear parabolic systems, en préparation.

[5] O. Guès : Perturbations singulières de problèmes mixtes hyperboliques multidimensionnels, preprint, septembre 1994, et séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique, 1993-94, exp n^o17.

[6] O. Guès : Problème mixte hyperbolique quasilinéaire caractéristique, Comm. Part. Diff. Equ., 15(5), (1990), 595-645.

[7] O. Guès, G. Métivier, J. Rauch : communication personnelle.

[8] J. Rauch : Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity, Trans. Amer. Math. Soc. 291, (1985), 167-185.