JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ÉVELYNE LATRÉMOLIÈRE

# Opérateur de Schrödinger avec une métrique

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1994), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1994____A15_0>

# Opérateur de Schrödinger avec une métrique

Évelyne LATRÉMOLIÈRE
Département de Mathématiques
Université de Nantes
Rue de la Houssinière 44072 NANTES — FRANCE

---

## Introduction

Ces dernières années, la diffusion par un potentiel à longue portée a été beaucoup étudiée. Nous allons ici présenter un travail similaire, mais portant sur une perturbation du second ordre de laplacien: notre perturbation, à longue portée, sera constituée d'une métrique et d'un champ électromagnétique.

Sur $\mathbf{R}^n$, soit $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une métrique définie positive d'inverse $G=(g^{ij})_{1\le i,j,\le n}$ et de déterminant $g$, $\vec{A}$ un potentiel-vecteur et $V$ un potentiel électrique. Étudions l'opérateur de Schrödinger:

$$H(\hbar)=g^{-1/4}\sum_{1\le i,j\le n}(-i\hbar\partial_i+A_i)g^{ij}g^{1/2}(-i\hbar\partial_j+A_j)g^{-1/4}+V$$

qui est le laplacien sur la variété $\mathbf{R}^n$ munie de la métrique $G$, avec un champ électromagnétique de potentiels $(\vec{A},V)$. $H$ représente par exemple une particule qui se déplace dans un espace non homogène. Nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein et omettrons désormais le signe somme: il faut comprendre toutes les formules où il y a des indices et des exposants comme une somme sur les indices répétés.

On suppose que $H$ est une perturbation à longue portée du laplacien:

$$\forall\alpha\in\mathbf{N}^n,\ \left|\partial^\alpha(G-Id)\right|+\left|\partial^\alpha\vec{A}\right|+\left|\partial^\alpha V\right|\le C_\alpha\langle x\rangle^{-\alpha-\rho},\ \rho>0$$

Avec cette hypothèse, on peut étudier la diffusion par $H$ en s'inspirant des résultats connus lorsque la perturbation est un potentiel à longue portée. La différence essentielle est que les estimations sont nettement moins bonnes en énergie.

On peut n'étudier que la partie principale de la perturbation:

$$P = -\hbar^2 \partial_i g^{ij} \partial_j .$$

$H$ et $P$ ont le même symbole principal, mais les sous-symboles diffèrent: il faut simplement corriger la condition de non-capture quand on passe de l'un à l'autre.

## Etude de la diffusion.

Il faut d'abord construire les trajectoires classiques de l'hamiltonien, afin de pouvoir définir des modificateurs pour les opérateurs d'onde et étudier la diffusion quantique. L'étude est calquée sur celle faite par Gérard et Martinez pour un potentiel. On utilise des trajectoires complexes (et non réelles comme Isozaki-Kitada) pour prolonger la matrice de diffusion dans le plan complexe et définir les résonances, ce qui n'apparaîtra pas aujourd'hui.

*Définition*

Soit les espaces entrant et sortant:

$$\Gamma^{\pm}(R,d,\varepsilon,\sigma) = \left\{ \begin{array}{l} (x,\xi) \in \mathbf{C}^{2n}; \left\{ \begin{array}{l} |\mathrm{Re}\, x| > R \\ |\mathrm{Im}\, x| \le \varepsilon \langle \mathrm{Re}\, x \rangle \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} |\mathrm{Re}\, \xi| > d \\ |\mathrm{Im}\, \xi| \le \varepsilon \langle \mathrm{Re}\, \xi \rangle \end{array} \right. \\ \qquad \text{et } \pm \langle \mathrm{Re}\, x | \mathrm{Re}\, \xi \rangle \ge -\sigma |x| |\xi| \end{array} \right\}$$

$R$, $d$, $\varepsilon$, $\sigma$ étant des constantes réelles, $R > 0$, $d > 0$, $\varepsilon > 0$, $-1 < \sigma < 1$.

La partie principale de l'opérateur de Schrödinger est $P = -\partial_i g^{ij} \partial_j$. Son symbole définit l'hamiltonien classique:

$$\mathcal{H}(x,\xi) = g^{ij}(x)\xi_i \xi_j .$$

*Théorème*

Alors, il existe une fonction de phase $\Phi_+$ sur $\Gamma^+(R,d,\varepsilon,\sigma)$ qui vérifie l'équation eiconale:

$$\mathcal{H}(x, \nabla_x \Phi_+(x,\eta)) = \eta^2 .$$

et
$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta (\Phi_+(x,\eta) - x.\eta) \right| = O\left( \langle x \rangle^{1-\rho-|\alpha|} \langle \eta \rangle^{1-|\beta|} \right).$$

On construit de même une fonction de phase dans $\Gamma^-$. On peut aussi montrer que si on approche la métrique $G$ par des métriques à support compact, la fonction de phase est bien approchée par les fonctions de phase correspondantes.

Comme la perturbation est à longue portée, les opérateurs d'onde non modifiés n'existent pas. On introduit donc un modificateur $J$, aussi proche que possible de l'identité, que l'on cherche sous forme d'un opérateur Fourier intégral:

$$J = (2\pi\hbar)^{-n} \int e^{i(\varphi(x,\xi)-y\xi)/\hbar} a(x,\xi)\, dy\, d\xi$$

$a$ étant une amplitude (a priori proche de 1), $\varphi$ une phase. La phase précédente peut servir de phase dans le modificateur, et l'amplitude $a$ est construite comme solution d'équations de transport (en prenant soin de garder des propriétés d'analycité), de façon que le noyau de l'opérateur $PJ - JH_0$ soit à décroissance exponentielle dans les espaces entrant et sortant ( $H_0 = -\hbar^2\Delta$ étant le laplacien non perturbé).

Soit $I$ un intervalle contenu dans $]2d^2, +\infty[$ et les opérateurs d'onde modifiés, définis par:

$$W^{\pm}(I) = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itP/\hbar} J e^{-itH_0/\hbar} E_{H_0}(I)$$

où $E_{H_0}(I)$ désigne le projecteur spectral associé à $H_0$.

*Théorème*

Les opérateurs d'onde $W^{\pm}(I)$ ainsi construits sont isométriques sur $E_{H_0}(I) L^2(\mathrm{R}^n)$ et sont complets, au sens:

$$\mathrm{Im}\, W^{\pm}(I) = E_P(I) H_c(P)$$

$H_c(P)$ étant le sous-espace spectral continu de $P$.

*Définition*

Définissons l'opérateur de diffusion sur $I$ par:

$$S(I) = W^{+}(I)^{*} W^{-}(I).$$

L'opérateur de transition $T(I)$ est défini par:

$$S(I) = Id - 2i\pi T(I).$$

Du fait de la conservation de l'énergie, les opérateurs $S(I)$ et $T(I)$ se diagonalisent à l'aide de la transformée de Fourier en $S(\lambda)$ et $T(\lambda)$ ($\lambda$ étant la variable d'énergie).

Dans le cas d'une perturbation par un potentiel $V$, on sait que si $V$ est à courte portée, $T(\lambda)$ est un opérateur compact sur $L^2(S^{n-1})$. Si $\rho$ est strictement supérieur à $\frac{n+1}{2}$, $T(\lambda)$ est même un opérateur de classe Hilbert-Schmidt.

## Section efficace totale de diffusion.

Etudions maintenant la section efficace de diffusion. On reprend l'opérateur avec champ électromagnétique $H(\hbar)$.

Notons $S(\lambda,\hbar): L^2(S^{n-1}) \to L^2(S^{n-1})$ la matrice de diffusion. On suppose $\rho$ strictement supérieur à $\frac{n+1}{2}$. Alors, l'opérateur de transition $T(\lambda,\hbar) = (2i\pi)^{-1}[Id - S(\lambda,\hbar)]$ est de classe Hilbert-Schmidt sur $L^2(S^{n-1})$, et son noyau $T(\theta,\omega,\lambda,\hbar)$ est l'amplitude de diffusion.

La section efficace totale de diffusion est:

$$\sigma(\omega,\lambda,\hbar) = |C(\lambda,\hbar)|^2 \int_{S^{n-1}} |T(\theta,\omega,\lambda,\hbar)|^2 d\theta$$

où la constante vaut:

$$C(\lambda,\hbar) = -(2\pi)^{(n+1)/2} \lambda^{-(n-1)/4} \exp\left(-i\frac{(n-3)\pi}{4}\right) \hbar^{(n-1)/2}.$$

Dans cette égalité, $\omega$ représente la direction d'entrée, $\theta$ la direction de sortie, et l'intégrale représente donc la probabilité pour une particule arrivant selon la direction $\omega$ d'être réellement diffusée par la perturbation.

Notre but est de donner une expression asymptotique de la section efficace de diffusion lorsque $\hbar$ tend vers 0. Le résultat principal est une généralisation de la formule asymptotique suivante, due à Robert-Tamura:

*Théorème*

> On considère l'opérateur $L = -\frac{\hbar^2\Delta}{2} + V$, dont on suppose l'indice de décroissance $\rho$ strictement supérieur à $\frac{n+1}{2}$. On suppose également $n \geq 2$ et l'hamiltonien classique sans trajectoire captée. On pose $\nu = \frac{n-1}{\rho-1}$.
>
> Soit $\lambda$ une énergie strictement positive fixée. Alors, la section efficace totale de diffusion $\sigma(\omega,\lambda,\hbar)$ admet l'expression asymptotique suivante lorsque $\hbar$ tend vers 0:

$$\sigma(\omega,\lambda,\hbar) = 4\int_{\Pi_\omega} \sin^2\left[2^{-1}(2\lambda)^{-1/2}\hbar^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} V(y+s\omega)ds\right]dy + o\left(\hbar^{-\nu}\right)$$

où $\Pi_\omega$ désigne l'hyperplan perpendiculaire à $\omega$.

Cette formule reste valable pour l'opérateur $H$, mais il faut remplacer $V$ par le potentiel effectif $W$ défini par:

$$(H(\hbar)-\lambda)\Phi_0 = W\Phi_0$$

$\Phi_0(x,\omega,\lambda,\hbar) = e^{i\sqrt{\lambda}x\omega/\hbar}$ étant les fonctions propres généralisées du laplacien, et surtout, il faut remplacer le rayon $s \mapsto y + 2\sqrt{\lambda}\omega s$ par le rayon $s \mapsto X(s,y,\omega) = \left(X_k(s,y,\omega)\right)_{1\le k\le n}$,

solution de:

$$\begin{cases} 2g^{ij}(y)\left(\sqrt{\lambda}\omega_j + A_j(y)\right)\dfrac{\partial X_k}{\partial y_i}(t,y,\omega) = \dfrac{dX_k}{dt}(t,y,\omega) \\ X(0,y,\omega) = y \end{cases}$$

De plus, si on suppose la perturbation à décroissance exponentielle, le reste dans la formule asymptotique est un $o(1)$ au lieu de $o\left(\hbar^{-\nu}\right)$ et le terme principal est un $O\left(|\ln\hbar|^{n-1}\right)$.

Nous allons donner une idée de la façon dont on obtient ces résultats.

On exprime d'abord la section efficace de diffusion à l'aide des fonctions propres généralisées de l'opérateur. Les fonctions propres généralisées de l'opérateur $H_0(\hbar)$ sont:

$$\Psi_0(x,\lambda,\omega,\hbar) = c_0(\lambda,\hbar)\ e^{i\sqrt{\lambda}\omega x/\hbar}$$

où $c_0(\lambda,\hbar) = (2\pi\hbar)^{-n/2}\lambda^{(n-2)/4}$ est une constante de normalisation et les fonctions propres généralisées de l'opérateur $H(\hbar)$ sont:

$$\Psi_\pm = \Psi_0 - R(\lambda \pm i0)\left(H(\hbar) - H_0(\hbar)\right)\Psi_0.$$

est unitaire, et donne une représentation spectrale de l'opérateur $H_0(\hbar)$.

$T(\lambda,\hbar)$ est un opérateur intégral de noyau:

$$T(\theta,\omega,\lambda,\hbar) = \left\langle \left(H(\hbar) - H_0(\hbar)\right)\Psi_+(.,\lambda,\omega,\hbar) \middle| \Psi_0(.,\lambda,\theta,\hbar)\right\rangle$$

Enfin, on pose $K(\lambda,\hbar) = T(\lambda,\hbar) - T(\lambda,\hbar)^*$. Comme $S(\lambda,\hbar)$ est unitaire, $T(\lambda,\hbar)$ est normal et en notant $K(\theta,\omega,\lambda,\hbar)$ le noyau de $K(\lambda,\hbar)$, on obtient:

$$\sigma(\omega,\lambda,\hbar) = i(2\pi)^n\lambda^{-(n-1)/2}\hbar^{(n-1)}K(\omega,\omega,\lambda,\hbar).$$

Pour estimer la section efficace $\sigma(\omega,\lambda,\hbar)$, le principal problème est d'estimer la résolvante $R(\lambda+i0)$. On suppose désormais l'hamiltonien classique sans trajectoire captée: on sait d'après un théorème de Robert et Tamura que c'est une condition nécessaire et suffisante pour contrôler $R(\lambda+i0)$ par l'estimation:

$$\text{pour tout } s>\frac{1}{2}, \qquad \left\|\langle x\rangle^{-s}R(\lambda+i0)\langle x\rangle^{-s}\right\| = O\left(\hbar^{-1}\right), \text{ pour } \hbar\to 0$$

On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles correspondant à $R(\lambda+i0)$ par une perturbation de $\Phi_0$, en calculant $(H(\hbar)-\lambda)\left(i\hbar^{-1}g_0\Phi_0\right)$: on choisira un $g_0$ convenable.

$$(H(\hbar)-\lambda)\left(i\hbar^{-1}g_0\Phi_0\right) = -i\hbar\left[\left(\partial_i g^{ij}\partial_j\right)g_0\right]\Phi_0 + 2g^{ij}\left(\sqrt{\lambda}\omega_i + A_i\right)\left(\partial_j g_0\right)\Phi_0 + i\hbar^{-1}W g_0\Phi_0.$$

On définit donc les trajectoires $X(t,y,\omega) = \left(X_k(t,y,\omega)\right)_{1\le k\le n}$ par:

$$\begin{cases} 2g^{ij}(y)\left(\sqrt{\lambda}\omega_j + A_j(y)\right)\dfrac{\partial X_k}{\partial y_i}(t,y,\omega) = \dfrac{dX_k}{dt}(t,y,\omega) \\ X(0,y,\omega) = y \end{cases}$$

exactement comme dans le cas avec potentiel d'un rayon de direction $\omega$, d'énergie $\lambda$, qui suit la trajectoire $X(t,y,\omega) = y + 2\sqrt{\lambda}\omega t$, solution du système précédent en annulant $G$ et $A$.

Pour étudier entièrement la section efficace, il faut faire une partition de l'unité, pour séparer les zones près et loin de l'origine.

Si $f$ est une fonction (dont le support est bine choisi), on approche $R(\lambda+i0)f\Phi_0$ par la fonction $g_0 = g_0(x,\hbar)$ définie par:

$$g_0(x,\hbar) = \int_0^\tau F(x,t,\hbar)dt$$

où

$$F(x,t,\hbar) = f(X(-t,x,\omega)) \exp\left(-i\hbar^{-1}\int_0^t W(X(s-t,x,\omega))ds\right)$$

et $\tau$ est un réel choisi convenablement par rapport au support de $f$.

Alors, en dérivant, on trouve:

$$2g^{ij}(x)\left(\sqrt{\lambda}\omega_j + A_j\right)\partial_i g_0(x,\hbar) + i\hbar^{-1}W(x)g_0(x,\hbar) = -\int_0^\tau \frac{d}{dt}F(x,t,\hbar)dt.$$

Ainsi, on obtient:

$$(H(\hbar)-\lambda)\left(i\hbar^{-1}g_0\Phi_0\right)=-i\hbar\left(\partial_i g^{ij}(x)\partial_j g_0\right)\Phi_0-\int_0^\tau \frac{d}{dt}F(x,t,\hbar)dt\,\Phi_0$$

donc $$(H(\hbar)-\lambda)\left(i\hbar^{-1}g_0\Phi_0\right)=f\Phi_0-r_1\Phi_0-r_2\Phi_0,$$

où: $$r_1(x,\hbar)=f(X(-\tau,x,\omega))\exp\left(-i\hbar^{-1}\int_0^\tau W(X(s-t,x,\omega))ds\right)$$

$$r_2(x,\hbar)=i\hbar\left(\partial_i g^{ij}(x)\partial_j g_0\right)(x,\hbar).$$

On obtient donc finalement l'expression de $R(\lambda+i0)f\,\Phi_0$:

$$R(\lambda+i0)f\,\Phi_0=i\hbar^{-1}g_0\Phi_0+R(\lambda+i0)r_1\Phi_0+R(\lambda+i0)r_2\Phi_0.$$

On peut montrer que les restes $r_1$ et $r_2$ sont négligeables, et on peut donc considérer que:

$$R(\lambda+i0)f\,\Phi_0\sim i\hbar^{-1}g_0\Phi_0$$

On applique ceci avec $f=W$ et en intégrant jusqu'à l'infini ($\tau$ n'est dû qu'à la partition de l'unité). Alors, la section efficace est, à un $o\left(\hbar^{-\nu}\right)$ près, donnée par la partie imaginaire du produit scalaire de $g_0$ et $W$ ce qui permet d'obtenir la formule asymptotique.

## CAS D'UNE PERTURBATION À DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE

Afin de simplifier les calculs, nous allons dans ce paragraphe nous restreindre au cas de l'opérateur $L=-\dfrac{\hbar^2}{2}\Delta+V$, le potentiel $V$ étant supposé exponentiellement décroissant, mais on pourrait procéder de la même façon avec la perturbation du second ordre.

En procédant comme précédemment, on trouve que tous les restes sont des $o(1)$ et la formule asymptotique devient donc la suivante.

*Théorème*

On suppose l'hamiltonien classique sans trajectoire captée. Soit $\lambda$ une énergie strictement positive fixée. Alors, la section efficace totale de diffusion $\sigma(\omega,\lambda,\hbar)$ admet l'expression asymptotique suivante lorsque $\hbar$ tend vers 0:

$$\sigma(\omega,\lambda,\hbar)=4\int_{\Pi_\omega}\sin^2\left[2^{-1}(2\lambda)^{-1/2}\hbar^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}V(y+s\omega)ds\right]dy+o(1)$$

Pour étudier ce type d'intégrale, on passe en sphériques, comme dans l'étude faite par D.Yafaev des perturbations homogènes, par le changement de variable suivant:

$$\begin{cases} y = (r, \varphi) \\ s = r \operatorname{cotg} \theta \end{cases}$$

Alors:

$$I(W) = 4 \int_{S^{n-2}} \int_0^{+\infty} r^{n-2} \sin^2 \left[ 2^{-1} (2\lambda)^{-1/2} \hbar^{-1} \int_0^{\pi} V(r, \varphi, \theta) \frac{r}{\sin^2 \theta} d\theta \right] dr \, d\varphi$$

On note $u(r, \varphi, \omega)$ la fonction définie par l'intégrale qui se trouve à l'intérieur du sinus.

Alors:

$$I(W) = 4 \int_{S^{n-2}} \int_0^{+\infty} r^{n-2} \sin^2 \left[ \hbar^{-1} u(r, \varphi, \omega) \right] dr \, d\varphi$$

On a donc besoin du comportement en $\hbar$ de l'intégrale par rapport à $r$. On intègre par parties.

$$I(W) = -4 \int_{S^{n-2}} \frac{\hbar^{-1}}{n-1} \int_0^{+\infty} r^{n-1} \partial_r u(r, \varphi, \omega) \sin\left[ 2\hbar^{-1} u(r, \varphi, \omega) \right] dr \, d\varphi$$

On fait le changement de variable:

$u = \hbar^{-1} u(r, \varphi, \omega)$, pour chaque $\varphi$ et $\omega$ fixés.

Il ne s'agit pas en général d'un changement de variable sur $]0, +\infty[$. En effet, typiquement, $u$ vaut 0 lorsque $r$ est en 0, tend vers 0 quand $r$ tend vers $+\infty$, et a une forme plus ou moins oscillante entre temps. Les points où $u$ s'annule sont tous, sauf $+\infty$, étudiés par le théorème de la phase stationnaire, et donnent des termes en puissance entière ou demi-entière de $\hbar$. Il ne reste plus qu'à étudier le comportement précis de $u$ lorsque $r$ tend vers $+\infty$ dans chacun des exemples.

Considérons le cas d'une perturbation par le potentiel $V(x) = e^{-\mu|x|}$, $\mu$ étant une constante strictement positive. On doit donc étudier l'intégrale:

$$I = 4 \int_{\Pi_\omega} \sin^2 \left[ 2^{-1} (2\lambda)^{-1/2} \hbar^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu|y + s\omega|} ds \right] dy$$

On obtient donc:

$$u(r, \varphi, \omega) = 2^{-1} (2\lambda)^{-1/2} \int_0^{\pi} \frac{r e^{-\mu r / \sin\theta}}{\sin^2 \theta} d\theta$$

Il s'agit d'une fonction positive, dont il faut connaître le comportement en 0 et $+\infty$. $\frac{r}{\sin^2\theta}$ est presque la dérivée de $\frac{r}{\sin\theta}$. On fait donc le changement de variable:

$$t=\frac{r}{\sin\theta}$$

mais sur les intervalles $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Ainsi:

$$u(r,\varphi,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_r^{+\infty}\frac{te^{-\mu t}}{\sqrt{t^2-r^2}}dt$$

En $r$, la partie importante est $\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}$, et en $+\infty$, c'est $e^{-\mu t}$. Alors:

$$0\le u(r,\varphi,\omega)\le\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_r^{2r}\frac{2re^{-\mu r}}{\sqrt{t^2-r^2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_{2r}^{+\infty}2e^{-\mu t}dt$$

$$0\le u(r,\varphi,\omega)\le\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(3re^{-\mu r}+\frac{2}{\mu}e^{-2\mu r}\right)$$

A l'infini, $u$ est essentiellement majoré par $e^{-\mu r}$, et il est borné en 0. On a donc juste à étudier ce qui se passe à l'infini. On a l'estimation:

$$0\le u(r,\varphi,\omega)\le Cre^{-\mu r}$$

En faisant le changement de variables $u=\hbar^{-1}u(r,\varphi,\omega)$, on obtient:

$$\ln|\hbar u|\le-\mu r+\ln(Cr)=-\mu r\left(1-\frac{\ln(Cr)}{\mu r}\right)$$

Lorsque l'on est assez loin pour que $|\hbar u|$ soit compris entre 0 et 1, et que $\left(1-\frac{\ln(Cr)}{\mu r}\right)$ soit supérieur à $\frac{1}{2}$, cela donne:

$$\mu r\le\left(1-\frac{\ln(Cr)}{\mu r}\right)^{-1}\ln|\hbar u|\le 2\ln|\hbar u|$$

$u$ est positif, et l'intégrale devient:

$$I\le\int\frac{4}{(n-1)\mu^{n-1}}\int|2\ln(\hbar u)|^{n-1}\sin u\,du\,d\varphi$$

L'intégrale ci-dessus se comporte comme $|\ln\hbar|^{n-1}$. Ainsi, la section efficace totale de diffusion est $O\left(|\ln\hbar|^{n-1}\right)$.

De plus:

$$u(r,\varphi,\omega)\ge 2^{-1}(2\lambda)^{-1/2}r\int_{\pi/6}^{5\pi/6}e^{-2\mu r}\,d\theta\ge Cre^{-2\mu r}$$

donc

$$\ln|\hbar u| \geq C - 2\mu r$$

donc $r$ est minoré par $\ln|\hbar u|$ et l'intégrale $I$ est minorée par un terme en $|\ln \hbar|^{n-1}$. Dans le cas particulier de cette perturbation, la section efficace de diffusion se comporte bien comme $|\ln \hbar|^{n-1}$, et on peut même, en faisant soigneusement les estimations, en donner un équivalent. Dans des cas plus généraux, on ne trouve que l'estimation en $O\left(|\ln \hbar|^{n-1}\right)$.

## Bibliographie.


[Ag-Co] J. Aguilar, J.M. Combes, On a class of analytic perturbations of one body Schrödinger operators, *Comm. Math. Phys.,* t.22, 1971, p.269-279.

[Ba-Co] E. Balslev, J.M. Combes, Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilatation analytic interactions, *Commun. Math. Phys.* t.22, 1971, p.280-294.

[Gé-Ma] C. Gérard, A. Martinez, Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée, *Ann.Inst.Henri Poincaré*, Vol 51, n°1, 1989, p 81-110

[Is-Ki] H.Isozaki and H.Kitada, Modified wave operators with time-independent modifiers, *J.Fac.Sc. Tokyo Sect IA*, *Math*, t.32, 1985, p.77-104.

[La] E.Latrémolière, Thèse.

[Ro] D.Robert, Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du laplacien, *Ann. de l'ENS*, t.25, 1992, p.107-134.

[Ro-Ta] D.Robert and I.Tamura, Semi-classical estimates for resolvents and asymptotics for total scattering cross-section, *Ann. Inst. H Poincaré*, Vol 46, n°4, 1987, p 415-442.

[Ya] D.Yafaev, The eikonal approximation and the asymptotics of the total scattering cross-section for the Schrödinger equation, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol 44, n°4, 1986, p.397-425.