JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

YURI V. EGOROV

Sur un exemple d'équation linéaire hyperbolique n'ayant pas de solution

Journées Équations aux dérivées partielles (1992), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1992____A14_0>

Sur un exemple d'équation linéaire hyperbolique n'ayant pas de solution

Yuri V. Egorov

1. Dans cette note nous démontrons qu'une équation de la forme

$$Pu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t)\frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x), \tag{1}$$

où $a \geq 0, b$ sont des fonctions réelles infiniment différentiables, peut ne pas avoir de solution distribution dans tout voisinage ω de l'origine pour quelque fonction $f \in C_0^\infty(\omega)$. On verra aussi que l'opérateur formellement adjoint P^* est localement non-résoluble.

L'équation (1) est (faiblement) hyperbolique. Le problème de Cauchy pour celle-ci a ètè étudié par M.H.Protter [1], M.M.Smirnov [2], V.Ya.Ivrii et V.Petkov [3] et autres. Le resultat le plus fort a été obtenu par O.A.Oleinik [4] (voir aussi [13]), qui a démontré, que le problème de Cauchy est bien posé pour $0 < t < T$ sous la condition suivante:

Il existe des constantes $\alpha, A, T_0, \ldots, T_N$, telles que $0 = T_0 < T_1 < \ldots < T_N = T$ et pour $T_j < t < T_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ l'inégalité

$$\alpha(t - T_j)b^2(t) \leq Aa^2(t) + (a^2(t))'_t$$

ou bien l'inégalité

$$\alpha(T_{j+1} - t)b^2(t) \leq Aa^2(t) + \frac{a(t)^2}{\alpha(T_{j+1} - t)} - (a^2(t))'_t$$

est vraie.

D'autre part, un exemple classique d'équation du premier ordre localement non résoluble est celui de H.Lewy [5]:

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i(x + iy)\frac{\partial u}{\partial t} = f(t, x, y).$$

F.Trèves a trouvé que l'opérateur differentiel LL^*L^*L d'ordre 4 est symetrique aux coefficients réels et localement non résoluble.

L.Hörmander [6] a démontré que l'équation réelle du second ordre

$$(y^2 - z^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + x^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$-\frac{\partial^2 (xyu)}{\partial x \partial y} + xz\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 (xzu)}{\partial x \partial z} = f(x, y, z)$$

est aussi localement non résoluble .

On trouvera dans les travaux de L.Hörmander [6], L.Nirenberg et F.Trèves [7], Yu.V.Egorov [8] des conditions nécessaires à la résolubilité des équations differentielles de forme générale (voir [9]). Le résultat le plus général dans cette direction est dû à Hörmander [10]. La résolubilité locale pour les équations ayant caractéristiques doubles a été étudiée par F. Treves, V.Ya.Ivrii, P.R.Popivanov, Ya.Kannai, l'auteur et d'autres. Ya.Kannai [11] a démontré la non résolubilité locale pour l'opérateur parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x).$$

Cette équation est "l'équation inverse de la chaleur" pour tout $t \neq 0$. Dans le travail [12] de F.Colombini et S.Spagnolo se trouve un exemple d'équation de la forme (1) avec une fonction $a(t)$ positive (mais non régulière), pour laquelle le problème de Cauchy est non résoluble localement, et un exemple d'équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a(t)}{a(x)}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x,$$

n'ayant pas de solutions de classe C^1 dans tout voisinage de l'origine, où $2^{-1} \leq a(t) \leq 2, \quad a(t) \in C^\alpha$ pour $\alpha < 1$, mais $a(t) \notin C^1$.

Dans notre exemple (1) la fonction $a(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$. Il est important de noter aussi que la technique habituelle de construction des séries asymptotiques n'est pas applicable dans ce cas. Il est en effet impossible de construire dans un voisinage de l'origine une fonction de phase régulière $w(t, x)$, de partie imaginaire positive, satisfaisant l'équation

$$w_t^2 - a(t)^2 w_x^2 = 0$$

ou bien l'équation

$$w_t^2 - a(t)^2 w_x^2 + ib(t)w_x = 0.$$

2. **Théorème.** *Il existe des fonctions réelles $a(t), b(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $a(t) \geq 0$, pour lesquelles l'équation (1) n'a aucune solution distribution dans tout voisinage ω de l'origine pour quelque fonction $f(t, x) \in C^\infty(\omega)$. L'opérateur adjoint (formellement) P^* est aussi localement non-résoluble dans tout voisinage*

de l'origine.

Lemme 1. *Si l'équation (1) est résoluble localement dans le domaine ω, alors il existe des constantes $C_1 \in \mathbf{R}$ et $N \in \mathbf{N}$ telles que*

$$\|u\|_0 \leq C_1 \|P^* u\|_N, \quad u \in C_0^\infty(\omega). \tag{2}$$

Démonstration du Lemme 1. La résolubilité locale de l'équation (1) dans le domaine ω entraîne l'existence des constantes réelles C, s et r, telles que

$$\|u\|_s \leq C \|P^* u\|_r, \quad u \in C_0^\infty(\omega). \tag{3}$$

La proposition est évidente quand $s \geq 0$. Si $s < 0$, choisissons $n_1 \in \mathbf{N}$, pour lequel $n_1 + s \geq 0$. Puisque $D_x^i u \in C_0^\infty(\omega)$ pour tout i, si $u \in C_0^\infty(\omega)$, nous avons

$$\|D_x^i u\|_s \leq C \|D_x^i f\|_r,$$

où $u \in C_0^\infty(\omega)$, $f = P^* u$, $i = 0, 1, \ldots$. Nous pouvons toujours supposer que $r \geq s$.

Exprimant $D_{tt}^2 u$ d'après l'équation $P^* u = f$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \|D_t^2 u\|_{s-1} &\leq C(\|D_x^2 u\|_{s-1} + \|D_x u\|_{s-1} + \|f\|_{s-1}) \\ &\leq C_1(\|D_x u\|_s + \|u\|_s + \|f\|_{r-1}) \leq C_2(\|D_x f\|_r + \|f\|_r). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|u\|_{s+1} \leq C_3(\|u\|_s + \|D_x^2 u\|_{s-1} + \|D_t^2 u\|_{s-1})$$

$$\leq C_4(\|f\|_r + \|D_x f\|_r + \|f\|_{r+1}) \leq C_1' \|f\|_{r+1}.$$

En recommencant cet argument, nous obtenons que

$$\|u\|_{s+2} \leq C_2' \|f\|_{r+2}, \ldots, \|u\|_{s+n_1} \leq C_{n_1}' \|f\|_{r+n_1}.$$

Comme $s + n_1 \geq 0$, nous avons

$$\|u\|_0 \leq C_{n_1}' \|f\|_{r+n_1}.$$

L'indice $r + n_1$ dans la partie droite peut toujours être augmenté. Nous pouvons donc affirmer que:

$$\|u\|_0 \leq C_{n_1} \|f\|_N,$$

où $N \in \mathbf{N}$, q.e.d.

Démonstration du Théorème. Soit ω un voisinage de l'origine, $\lambda >> 1$, et la fonction $F \in C_0^\infty(-1, +1)$. Soit $k \in \mathbf{N}$ et $I_k = (1/k\pi,\, 1/(k-1)\pi)$.

Les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ dans notre exemple ont la forme suivante:

$$a(t) = exp(-t^{-2} - sin^{-2}(1/t)),$$
$$b(t) = -2a(t)\mu'(t) - a'(t),$$

où

$$\mu(t) = -sin^{-4}(1/t) - ln|t|$$

est une fonction réguliere dans I_k et telle que

$$e^{\mu(t)} \to 0, \; D_t^i e^{\mu(t)} \to 0,$$

quand t tend vers les points extrêmes de l'intervalle I_k. Il est évident que $b \in C^\infty$ et que

$$\int_{I_k} e^{2\mu(t)} dt = \int_0^\pi exp(-2sin^{-4}s)ds = c_1.$$

Après substitution $x_1 = x - A(t)$, où A est une fonction telle que $A'(t) = a(t)$, l'équation $P^*u = 0$ prend la forme

$$P_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - (b(t) + a'(t))\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(nous supprimons l'indice 1 pour simplifier).

Nous voulons construire une fonction $u_\lambda(t,x) \in C_0^\infty(K)$, où $K = I_k \times (-\lambda^{-1}, \lambda^{-1})$, telle que

$$\|u_\lambda\|_0 \geq c_0 > 0, \quad \|P^* u_\lambda\|_N \leq C\lambda^{-1}. \tag{4}$$

En injectant cette fonction dans (2), nous arriverons à une contradiction pour λ et k assez grand. Puisque pour tout voisinage ω de l'origine le domaine K est inclus dans ω pour $\lambda > \lambda_\omega, k > k_\omega$, cela démontrera que l'opérateur P est localement non résoluble à l'origine.

Soit

$$u(t,x) = F(\lambda x)e^{\mu(t)}v(t,x).$$

Alors la fonction v satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2a(t)\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - 2a(t)\lambda\frac{F'(\lambda x)}{F(\lambda x)}\frac{\partial v}{\partial t} + 2\mu'(t)\frac{\partial v}{\partial t} + (\mu'^2(t) + \mu''(t))v = 0.$$

Le changement de variable $x_2 = \lambda x_1$ donne:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2a(t)\lambda\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x} - 2a(t)\lambda\frac{F'(x)}{F(x)}\frac{\partial v}{\partial t} + 2\mu'(t)\frac{\partial v}{\partial t} + (\mu'^2(t) + \mu''(t))v = 0 \quad (5)$$

(l'indice 2 est supprimé de même).

Nous cherchons une solution approchée de l'équation (5) de la forme

$$v(t,x) = \sum_{j=0}^{M} \lambda^{-j} v_j(t,x),$$

où $v_0(t,x) = 1, v_j(t,x) = \mu_j(t)F_j(x)$, pour $j = 1,\ldots,M$ et

$$\frac{\partial^2(F(x)v_j(t,x))}{\partial t\partial x} = \frac{F(x)}{a(t)}\left[\frac{\partial^2 v_{j-1}(t,x))}{\partial t^2} + 2\mu'(t)\frac{\partial v_{j-1}(t,x)}{\partial t} + (\mu'^2(t) + \mu''(t))v_{j-1}\right],$$

$j = 1,2,\ldots,M$. Mais alors

$$G_j'(x) = G_{j-1}(x),\ \mu_j'(t) = [\mu_{j-1}'' + 2\mu'\mu_{j-1}' + (\mu'' + \mu'^2)\mu_{j-1}]/a(t),$$

où $G_j(x) = F(x)F_j(x)$, $j = 1,2,\ldots,M$, $G_0(x) = F(x), \mu_0(t) = 1$. Il est facile de voir que pour $t \in I_k$

$$|\mu_j(t)e^{\mu(t)}| \leq C_{j,k}.$$

D'autre part,

$$\int\int_K e^{2\mu(t)}F^2(\lambda x)dxdt \geq c_0\lambda^{-1} > 0,$$

$$\int\int_K e^{2\mu(t)}F^2(\lambda x)v_j^2(t,\lambda x)dxdt \leq C_{j,k}\lambda^{-1},$$

$j = 1,2,\ldots,M$ et donc $\|u\|_0^2 \geq c_0\lambda^{-1}/2$ pour $\lambda > \Lambda(\omega,k,M)$. Dans le même temps

$$\|P^*u(t,x)\|_N^2 \leq C\lambda^{2N-2M-1}.$$

Si M est assez grand pour que $N - M \leq -1$, alors les inégalités (4) sont vraies pour la fonction

$$u_\lambda = \lambda^{1/2}F(\lambda(x - A(t)))e^{\mu(t)}v(t,\lambda(x - A(t))).$$

Pour démontrer non résolubilité locale d'opérateur adjoint P^* c'est suffisant de remarquer que P^* coincide avec P après la substitution $x_1 = -x$.

Le theorème est démontré.

La question de solvabilité d'équations de la forme (1) m'a été posée par le Professeur P. Guan, de l'Université de McMaster à Hamilton, Canada, à qui je

voudrais exprimer ma gratitude.

Références bibliographiques.

[1] M.H.Protter, The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line, *Canad. J. Math.*,**6**, 1954, 542-553.

[2] M.M.Smirnov, Degenerating elliptic and hyperbolic equations, Nauka, Moscow, 1966.

[3] V.Ya.Ivrii, V.Petkov, Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, *Russian Math.Surveys,* **29**, 1974, 1-70.

[4] O.A.Oleinik, On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equation, *Comm. Pure Appl. Math.,* **23**, 1970, 569-586.

[5] H.Lewy, An example of a smooth linear partial differential equation without solution, *Ann. of Math.*,**66**, 1957, 155-158.

[6] L.Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, 1976.

[7] L.Nirenberg, F.Trèves, On local solvability of linear partial differential operators I. Necessary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.*, **23**, 1970, 1-38.

[8] Yu.V.Egorov, Sur la solvabilité des équations différentielles à caractéristiques doubles, *Russian Math.Surveys,* **26**, 1971, 183-198.

[9] Yu.V.Egorov, Linear differential equations of principal type, Plenum Press, 1986.

[10] L.Hörmander, The analysis of linear partial differential operators III, Springer, 1985.

[11] Y.Kannai, An unsolvable hypoelliptic diferential operator, *Israel Math. J.*, **9**, 1971, 306-315.

[12] F.Colombini, S.Spagnolo, Some examples of hyperbolic equations without local solvabilty, *Ann.Sci. de l'Ecole Normale Supérieure de Paris*, **12**, 1989, 109-125.

[13] F.Colombini, E.Jannelli, S.Spagnolo, Non-uniqueness in hyperbolic Cauchy problems, *Annals of Mathematics*, **126**, 1987, 495-524.

Université d'Etat de Moscou
Ecole Normale Superieure de Lyon