JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FABRICE BÉTHUEL

Passage à la limite faible dans des équations aux dérivées partielles non linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1991), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1991____A3_0>

Passage à la limite faible dans des équations aux dérivées partielles non linéaires

Fabrice BETHUEL

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, CERMA la Courtine 93167
NOISY-LE-GRAND CEDEX

et

CMLA ENS CACHAN

Introduction : Soit H un espace de Hilbert, et F une fonctionnelle définie sur H. Une suite de Palais-Smale pour F est une suite u^n d'éléments de H telle que $dF(u^n) \longrightarrow 0$, et $F(u^n) \leqslant C$. Les suites de Palais-Smale s'introduisent naturellement lorsqu'on cherche à trouver des solutions à l'équation $dF = 0$, (en général une équation aux dérivées partielles) par des méthodes variationnelles (théorie de Morse, lemme du col, etc...). Celles-ci peuvent être utilisées directement lorsque F satisfait la condition dite de Palais-Smale : de toute suite de Palais-Smale on peut extraire une sous-suite convergente. Malheureusement, dans beaucoup de situations intéressantes, (en particulier lorsque l'équation est invariante par certains groupes de symétries), la condition de Palais-Smale n'est pas satisfaite. Dans de nombreux cas, on peut néanmoins se contenter de démontrer que pour toute suite de Palais-Smale il existe une sous-suite qui converge faiblement.

Ici nous prendrons comme exemple modèle l'équation des surfaces à courbure moyenne prescrite : nous montrerons comment des phénomènes de compensation permettent de passer faiblement à la limite dans les équations. Soit D^2 le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Soit $H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit γ une application de ∂D^2 vers $\mathbb{R}^3$ dans $H^1(\partial D^2) \hookrightarrow C^0$. Soit $u \in H^1_\gamma(D^2;\mathbb{R}^3)$. On dit que u vérifie l'équation des surfaces à courbure moyenne (H) prescrite (avec valeur au bord γ) si

(1) $-\Delta u = 2H(u)\, u_x \wedge u_y$ au sens faible

$u = \gamma$ sur ∂D^2

Cette équation apparait en géométrie : si u est un paramétrage conforme d'une surface S de $\mathbb{R}^3$ et vérifie (1), la courbure moyenne de la surface S, en $u(x,y)$ est $H(u)$. Les solutions de (1) sont des points critiques de la fonctionnelle :

$$(2) \qquad F(u) = E(u) + V_Q(u)$$

où $E(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int |\nabla u|^2$ et $V_Q = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int Q(u)\, u_x \wedge u_y$

où $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifie

$$\operatorname{div} Q = 3H.$$

En particulier si $H = H_0 = C^{te}$ on peut prendre $Q(x_1, x_2, x_3) =$

$(H_0 x_1, H_0 x_2, H_0 x_3)$. Dans le cas général, un choix possible pour Q est

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \left(\int_0^{x_1} H(s, x_2, x_3)ds,\ \int_0^{x_2} H(x_1, s, x_3)ds,\ \int_0^{x_3} H(x_1, x_2, s)ds\right).$$

Pour trouver des solutions à(1) il est naturel de vouloir minimiser F sur $H^1_\gamma(D^2, \mathbb{R}^3)$. Malheureusement F n'est pas bornée inférieurement. Néanmoins si γ vérifie (après translation éventuelle) la condition suivante

$$(3) \quad \|\gamma\|_{L^\infty} \|H\|_{L^\infty} < 1$$

On peut montrer que le minimum de F est atteint sur

$$M = \left\{u \in H^1_\gamma(D^2; \mathbb{R}^3)\ \|u\|_{L^\infty} \leqslant \|\gamma\|_{L^\infty}\right\}$$

On a alors

<u>Théorème 1 ([Hildebrandt])</u> : si γ vérifie (3) alors il existe $u_H \in H^1_\gamma\ (D^2; \mathbb{R}^3)$ vérifiant (1) telle que

$$\|u_H\|_{L^\infty} \leqslant \|\gamma\|_{L^\infty}.$$

De plus u_H est un minimum local strict de F.

Soit u_0 l'extension harmonique de γ : (ie. u_0 vérifie $-\Delta u = 0$, $u_0 = \gamma$ sur ∂D^2). u_H est très proche de u_0 au sens suivant

<u>Lemme 1</u> : On a

$$(4) \quad (|E(u_H) - E(u_0)|) \leqslant C(\gamma)\, E(u_0).$$

où $C(\gamma) \longrightarrow 0$ quand $\gamma \longrightarrow 0$ dans $H^{1/2}$.

Pour trouver d'autres solutions que u_H, par des méthodes variationnelles, on considère les suites de Palais-Smale pour F. Soit u^n une telle suite. Elle vérifie $F(u^n) < C$ et

(5) $-\Delta u^n = 2H(u^n)\, u^n_x \wedge u^n_y + f^n$

où $f^n \longrightarrow 0$ dans H^{-1} [(4) exprime que $dF(u^n) \longrightarrow 0$] . On démontre alors le théorème suivant.

<u>Théorème 2</u> : [Bethuel 2]. Supposons que H vérifie

(6) $\|H\|_{L^\infty} \leqslant C$

(7) $\|\nabla H\|_{L^\infty} \leqslant C$

Soit u^n une suite de $H^1(\Omega^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $u^n \longrightarrow u$ dans H^1 faible et telle que

$$-\Delta u^n = 2H(u^n)\, u^n_x \wedge u^n_y + f^n$$

avec $f^n \in H^{-1}$, $\|f^n\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0$. Alors u vérifie

$$-\Delta u = 2H(u)\, u_x \wedge u_y$$

Dans le cas où $H=H_0$ est constant, la preuve du théorème 1 est facile à obtenir (voir [Wente] ou [Brezis-Coron]). En effet si $u \in C^\infty$, on a

(8) $u_x \wedge u_y = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u \wedge uy) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x \wedge u)\right]$

Si φ est une fonction test de $C^\infty_0(B^2; \mathbb{R}^3)$ on a

$$I(u) = \int \varphi u_x \wedge u_y = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} u \wedge u_y + \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} u_x \wedge u$$

et cette égalité reste vraie pour $u \in H^1$ par approximation. On vérifie alors aisément que si $u^n \longrightarrow u$ faible dans H^1, alors $I(u^n) \longrightarrow I(u)$. On peut donc passer à la limite dans la non linéarité, et le Théorème 2 en découle (pour $H = C^{te}$).

Lorsque H est variable, l'intégrale $I_H(u^n) = \int \varphi H(u^n) u^n_x \wedge u^n_y$ n'est plus continue par convergence faible et il faut alors utiliser le couplage lié à l'équation.

F. Pacard a donné une démonstration du théorème 2 dans le cas particulier où $f^n = 0$ et $u^n \in C^3$. Elle utilise des estimées à a priori pour des solutions régulières de (1), basée sur des inégalités de type Böchner et une méthode de recouvrement due à Sachs et Uhlenbeck ([Sc U], voir aussi Schoen [Sc]).

La preuve du théorème 2 comporte trois étapes principales.

- Une approximation de u^n par des application régulières et vérifiant une équation du même type ;

- une méthode de recouvrement-recollement, qui va faire apparaître des termes de bord.

- une estimée qui permet de comparer des termes de bord, utilisant de manière essentielle le résultat de compensation suivant, du à Wente :

Théorème 3 ([Wente] voir aussi [Brezis-Coron]). Soit $u \in H^1(D^2;\mathbb{R}^3)$, et $\varphi \in W_0^{1,1}$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = u_x \wedge u_y \text{ dans } D^2 \\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial D^2 \end{cases}$$

Alors $\varphi \in H^1 \cap L^\infty$ et

(9) $\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\nabla u\|_{L^2} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^2}^2$.

II Démonstration du théorème 2

II-1 une technique d'approximation

On a le résultat suivant :

Théorème 4 : Soit $v \in H^1_\gamma(\Omega,\mathbb{R}^3)$, $f \in H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$($\Omega$ domaine borné régulier de $\mathbb{R}^2$), tels que

$$-\Delta v = 2H(v)\, v_x \wedge v_y + f.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des applications $\bar{v} \in C^3_\gamma(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $\bar{f} \in C^3(\Omega;\mathbb{R}^3)$ et $\bar{g} \in C^3(\Omega;\mathbb{R}^3)$, telle que

$$-\Delta\bar{v} = 2H(\bar{v})\, \bar{v}_x \wedge \bar{v}_y + \bar{f} + \bar{g}$$

$$\text{et } \|v-\bar{v}\|_{H^1} + \|f-\bar{f}\|_{H^{-1}} + \int |\bar{g}| < \varepsilon .$$

Le théorème 4 permet de régulariser la suite u^n, qui sera dorénavant remplacée par une suite $\overset{n}{\bar{u}}$ telle que

. $\overset{n}{\bar{u}} \in C^3(\Omega;\mathbb{R}^3)$

. $\overset{n}{\bar{u}} \rightharpoonup u$ dans H^1 faible

. $\overset{n}{\bar{u}}$ vérifie

$$(10)\quad -\Delta\overset{n}{\bar{u}} = 2\,H\,(\overset{n}{\bar{u}})\ \overset{n}{\bar{u}}_x \wedge \overset{n}{\bar{u}}_y + \overset{n}{\bar{f}} + \overset{n}{\bar{g}} \text{ avec}$$

$$\overset{n}{\bar{f}} \in C^3,\ \overset{n}{\bar{g}} \in C^3,\ \text{et } \|\overset{n}{\bar{f}}\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0 \quad \int |\bar{g}|^{n} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

II-2 Une méthode de recouvrement-recollement

L'idée principale est de construire une nouvelle suite $\underline{u}$ (n,m)(où m est un nouveau paramètre, défini plus bas) qui converge fortement vers u, et qui vérifie une équation proche de (1), (de sorte que l'on peut passer à la limite dans la non-linéarité). Nous utilisons un argument inspiré de [Be 1].

Tout d'abord, nous divisons (II-2.1) le domaine en carrés C_r, de coté de longueur $\frac{1}{m}$, choisis de manière adéquate. Sur chaque carré C_r $\underline{u}(n,m)$ sera la solution de Hildebrandt avec pour donnée au bord $\overset{n}{\bar{u}}$, sur ∂C_r, quand il est possible de la définir (sinon on prendra l'extension harmonique de la valeur au bord). On montre alors que $\underline{u}(n,m)$ converge fortement vers u quand $n \longrightarrow +\infty$ $n \longrightarrow +\infty$. Enfin (II.2-3) on calcule l'Equation pour $\underline{u}(n,m)$ et on s'aperçoit qu'on a essentiellement besoin de calculer des termes de bord.

II.2-1 : Division en carré $\underline{C}_r$

On montre que l'on peut diviser le domaine en carrés C_r, contigus, tels que C_r est translaté de $\left[-\frac{1}{2m}\ \frac{1}{2m}\right]^2$ et

(11) . $\overset{n}{\bar{u}} \longrightarrow u$ dans $H^{1/2}(\partial C_r)$ et $C^{0,\alpha}$ pour tout carré C_r

(12) . $\Sigma\, E(u,\partial C_r) \leqslant Cm\, E(u)$, où $E(u;\partial C_r) = \int_{\partial C_r} |\nabla u|^2$ et $E(u) = \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^2$.

On note alors Q_m la réunion des carrés C_r tels que

(13) $\quad \|u\|_{L^\infty(\partial C_r)} \;\|H\|_{L^\infty} < 1.$

et P_m le complémentaire de Q_m. On montre alors en utilisant (12) que $\mathrm{mes}(P_m) \longrightarrow 0$, quand $m \longrightarrow +\infty$.

Pour tout carré C_r, soit $u_0(n,m)$ vérifiant

$$(14)\quad \begin{cases} -\Delta u_0(n,m) = 0 \text{ dans } C_r \\ u_0(n,m) = \overset{n}{\bar{u}} \text{ sur } \partial C_r \end{cases}$$

Si $C_r \subset Q_m$, on définit $\underline{u}(n,m)$ comme la solution de Hildebrandt (théorème 1) avec pour donnée au bord $\overset{n}{\bar{u}}$. Donc $\underline{u}(n,m)$ vérifie

$$(15)\quad \begin{cases} -\Delta \underline{u}(n,m) = 2H(\underline{u}(n,m))\underline{u}(n,m)_x \wedge \underline{u}(n,m)_y \text{ dans } C_r \\ \underline{u}(n,m) = \overset{n}{\bar{u}} \qquad\qquad \text{sur } \partial C_r \end{cases}$$

Si $C_r \subset P_m$ on pose $\underline{u}(n,m) = u_0(n,m)$. Il est clair que $\underline{u}(n,m) \in H^1 \cap C^0$, $u_0(n,m) \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3) \cap C^0$, et (11) implique que $u_0(n,m) \longrightarrow u$ dans H^1 en utilisant le lemme 1 et (11) on montre alors que $\|u_0(n,m) - \underline{u}(n,m)\|_{H^1} \longrightarrow 0$ et donc que
$\underline{u}(n,m) \longrightarrow u$ dans H^1.

<u>II-2-2 Equation d'Euler pour $\underline{u}(n,m)$</u>

Pour démontrer le théorème 2, il suffit de montrer que pour $\zeta \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)$

$$I(u,\zeta) = 0$$

où pour $v \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$

$$I(v,\zeta) = \int \nabla v.\nabla\zeta - 2\int H(v)\cdot v_x \wedge v_y \cdot \zeta$$

Calculons $I(\underline{u}(n,m),\zeta)$. On obtient en utilisant (10),(15), en intégrant par partie

$$I(\underline{u}(n,m),\zeta) = \Sigma\int_{\partial C_r} \zeta \frac{\partial \underline{u}(n,m)}{\partial n} + R(n,m,\zeta)$$

$$= \Sigma\int_{\partial C_r} \zeta \frac{\partial \underline{u}(n,m) - \partial \overline{u}^{n}}{\partial n} + R(n,m,\zeta)$$

où

$$R(n,m,\zeta) = \sum_{C_r \subset Pm} -2H(\underline{u}(n,m)\ \underline{u}(n,m)_x \wedge \underline{u}(n,m)_y \zeta$$

comme $\text{mes}(P_m) \longrightarrow 0$, $|R(n,m,\zeta)| \longrightarrow 0$.

On a donc

$$(16)\quad |I(\underline{u}(n,m),\zeta)| \leqslant |\zeta|_{L^\infty} \Sigma \int_{\partial C_r} \left| \frac{\partial \underline{u}(n,m) - \partial \overline{u}^{n}}{\partial n} \right| + |\zeta|_{L^\infty} R(n,m,\zeta)|$$

Par ailleurs comme $\underline{u}(n,m) \longrightarrow u$ dans H^1, $I(\underline{u}(n,m),\zeta) \longrightarrow I(u,\zeta)$ (pour une sous-suite) et donc, pour démontrer le théorème 2, il suffit de montrer que

$$I(\underline{u}(n,m),\zeta) \longrightarrow 0, \qquad \text{pour tout } \zeta \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3).$$

Pour ce faire, il faut montrer que la contribution des termes de bord dans (16) converge vers zéro. En adaptant légèrement la méthode présentée ci-dessus on peut alors conclure grâce au Théorème 5 ci-dessous.

II-2-3 Comparaison de termes de bord

On considère deux applications de classe C^3 de $C^2 = [0,1]^2$ vers $\mathbb{R}^3$, v_0 et v_1, telles que $v_0 = v_1 = \gamma$ sur ∂C^2. Posons

$$\overline{E} = \max\left(\int |\nabla v_0|^2, \int |\nabla v_1|^2\right)$$

et supposons $\overline{E} < 1$, et que v_0 et v_1 vérifient

$$(17)\quad -\Delta v_0 = 2H(v_0)\, v_{0x} \wedge v_{0y} + f_0 + g_0$$

$$(18)\quad -\Delta v_1 = 2H(v_1)\, v_{1x} \wedge v_{1y} + f_1 + g_1$$

$$(19)\quad v_0 = v_1 = \gamma \text{ sur } \partial C^2$$

où f_0, g_0, f_1, g_1 sont régulières (C^3) et telles que

$$(20)\quad \int |g_0| + \int |g_1| + |f_0|_{H^{-1}} + |f_1|_{H^{-1}} \leqslant \overline{E}^{6}.$$

en utilisant l'isomorphisme $H^{-1} \longrightarrow H_0^1$ on peut écrire $f_0 = \Delta h_0$, $f_1 = \Delta h_1$. On a :

<u>Théorème 5</u> : Soit $0 < \delta < 1$, et $\alpha < \delta$ il existe $\eta \in [\alpha-\delta, \alpha]$ tel que

$$(21)\quad \int_{\partial C(\eta)} \left|\frac{\partial(v_0 - v_1)}{\partial n}\right| + \left|\frac{\partial h_1}{\partial n}\right| + \left|\frac{\partial h_2}{\partial n}\right| \leqslant \frac{C}{\delta^{3/2}} \overline{E}^{11/8}$$

et

$$(22)\quad \mathrm{Sup}\,\{|v_0 - v_1| \quad x \in C(\eta)\} \leqslant \frac{C}{\delta^2}\,\overline{E}^{11/8}$$

où

$$C(\eta) = \left\{(x,y) \in C^2,\ \left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \eta/2,\ \left|y - \frac{1}{2}\right| \leqslant \eta/2\right\} \blacksquare$$

La preuve du Théorème 5 utilise de manière essentielle deux ingrédients :

- Le résultat de compensation de Wente (théorème 3)
- La formule de la coaire (généralisée) de Federer et Fleming ci-dessous.

<u>Théorème 6</u> : Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$, borné. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, et et $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ des applications régulières. On a, pour tout $A \subset \Omega$

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{f^{-1}(y) \cap A} g\right] dy = \int_A |\nabla f| \cdot g \ .$$

<u>Idée de la démonstration du théorème 5</u> :

On pose $\Phi = v_0 - v_1$ et on considère, pour $\varepsilon > 0$ les ensembles

$$W(\varepsilon) = \left\{x \in C^2,\ |v_0 - v_1| = |\Phi(x)| \leqslant \varepsilon\right\}$$

et

$$V(\varepsilon) = |\Phi|^{-1}(\{\varepsilon\}) = \partial W(\varepsilon) \setminus \partial C^2$$

Nous allons estimer

$$\Lambda(\varepsilon) = \int_{W(\varepsilon)} |\nabla (v_0 - v_1)|^2 = \int_{W(\varepsilon)} |\nabla\Phi|^2$$

On a une première estimée, qui n'utilise pas la compensation (Théorème 3)

<u>Lemme 2</u> : Pour $\varepsilon \geqslant \bar{E}^4$ on a

(23) $\Lambda(\varepsilon) \leqslant C\,\bar{E}\,\varepsilon$

où C ne dépend que de $\|H\|_{L^\infty}$.

<u>preuve du lemme 2</u> : On multiplie les équations (17) et (18) par Φ en intégrant sur $W(\varepsilon)$ on obtient, pour tout ε

$$(23)\ \Lambda(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\int_{V(\varepsilon)} \frac{\partial|\Phi|}{\partial n} + \int_{W(\varepsilon)} 2|\Phi|\,|[H(v_0)(v_{0x}\wedge v_{0y} - H(v_1)v_{1x}\wedge v_{1y})]$$

$$+ \int_{W(\varepsilon)}(f_0 - f_1)\,\Phi + \int_{W(\varepsilon)}\Delta(h_0 - h_1)\,\Phi$$

On écrit ensuite

$$(25)\ \int_{W(\varepsilon)}\Delta(h_0 - h_1)\,\nabla\Phi + \int_{v(\varepsilon)} \frac{\partial(h_0 - h_1)}{\partial n}\,\Phi.$$

Le terme le plus délicat à estimer est $\left|\int \frac{\partial h_0 - h_1}{\partial n}\,\Phi\right| \leqslant \varepsilon\int \left|\frac{\partial h_0 - h_1}{\partial n}\right|$.

A cet effet nous utiliserons la formule de la coaire (Théorème 6)

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\int_{V(\varepsilon)}\left|\frac{\partial h_0 - h_1}{\partial n}\right| \leqslant \int_{W(2\varepsilon)} |\nabla(h_0 - h_1)|\,|\nabla\Phi| \leqslant \left[\int |\nabla(h_0 - h_1)|^2\right]^{1/2}\left[\int |\nabla\Phi|^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant C\bar{E}^6$$

Comme $\varepsilon > \bar{E}^2$, il existe donc, par la formule de la moyenne

$\varepsilon \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ tel que

$$(26)\ \int_{V(\varepsilon_1)}\left|\frac{\partial(h_0 - h_1)}{\partial n}\right| \leqslant C\bar{E}^4 \leqslant C\bar{E}^2\,\varepsilon_1$$

On estime alors $\Lambda(\varepsilon_1) \geqslant \Lambda(\varepsilon)$. Pour calculer $\int_{V(\varepsilon_1)}\frac{\partial|\Phi|}{\partial n}$, on multiplie les équations (17)et(18) par $\frac{\Phi}{|\Phi|}$, on intègre sur $C^2\backslash W(\varepsilon_1)$, et on soustrait. On obtient alors, après quelques estimées faciles

$$(27)\quad \int_{V(\varepsilon_1)} \frac{\partial|\Phi|}{\partial n} \leqslant C\bar{E}$$

en combinant (24), (25), (26), (27) on obtient finalement l'estimée du Lemme 2.

En utilisant le phénomène de compensation, on peut obtenir un résultat plus fin. Soit $\tilde{W}(\varepsilon)$ la composante connexe de $W(\varepsilon)$ contenant ∂C^2, et soit $\tilde{V}(\varepsilon)=\partial\tilde{W}(\varepsilon) \setminus \partial C^2$. Posons $\tilde{\Lambda}(\varepsilon)=\int_{\tilde{W}(\varepsilon)} |\nabla\Phi|^2$.

On a

<u>Lemme 3</u> : Pour tout $\bar{E}^2 \leqslant \varepsilon < \bar{E}^{1/2}$, on a

$$(28)\quad \tilde{\Lambda}(\varepsilon) \leqslant C\bar{E}^{11/8}\varepsilon$$

<u>Fin de la démonstration du Théorème 5</u> : Posons, pour $\varepsilon > 0$

$$L(\varepsilon) = \mathcal{H}^1\left(\tilde{V}(\varepsilon)\right)$$

La formule de la coaire montre que (avec g=1 dans le théorème 6)

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} L(\varepsilon')d\varepsilon' \leqslant \int_{\tilde{W}(\varepsilon)} |\nabla\Phi| \leqslant \left[\tilde{\Lambda}(\varepsilon)\right]^{1/2} \leqslant \left[C\bar{E}^{11/8}\varepsilon\right]^{1/2}$$

Donc il existe $\varepsilon_1 \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ tel que

$$L(\varepsilon_1) \leqslant \left[\frac{C\bar{E}^{11/8}}{\varepsilon}\right]^{1/2}$$

choisissons $\varepsilon = 64\dfrac{C\bar{E}^{11/8}}{\delta^2}$. On obtient

$$L(\varepsilon_1) \leqslant \frac{\delta}{8}.$$

Il en résulte que pour un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $]\alpha-\delta,\alpha[$ de mesure supérieure à $\delta/2$, et pour $\eta \in \mathcal{A}$ on a

$$\partial C(\eta) \subset \tilde{W}(\varepsilon_1)$$

Par conséquent

$$\int_{\mathcal{A}}\left[\int_{C(\eta)}|\nabla(v_0-v_1)|^2\right]\,d\eta \leqslant \int_{W(\varepsilon_1)}|\nabla(v_0-v_1)|^2 \leqslant \tilde{\Lambda}(\varepsilon_1)$$

Comme mes $\mathcal{A} \geqslant \frac{\delta}{2}$, pour un sous-ensemble $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$, de mesure supérieure à $\delta/4$ on a, pour $\eta \in \mathcal{A}'$

$$\int_{\partial C(\eta)}|\nabla(v_0-v_1)|^2 \leqslant C\bar{E}^{11/8}\varepsilon/\delta \leqslant \left(C\bar{E}^{11/8}\right)^2/\delta^3$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors

$$\int_{C(\eta)}|\nabla(v_0-v_1)| \leqslant C\bar{E}^{11/8}/\delta^{3/2}$$

et les estimées en $|\nabla h_0| + |\nabla h_1|$ s'obtiennent de manière similaire. Ceci termine la preuve du Théorème 5.

III-4 Fin de la preuve du théorème 2

La preuve du théorème 2 s'obtient en combinant les trois parties précédentes. Rappelons que l'on cherche à démontrer que $I(u,\zeta)=0$, pour tout $\zeta \in C_0^\infty(R)$. On introduit un nouveau paramètre K (que l'on fera tendre vers zéro ultérieurement), et on choisit δ (qui apparait dans le théorème 5) en posant $\delta=K^{1/7}$. On montre, que pour une sous-suite de $\bar{u}^n$, on peut choisir les C_r tels que

$$\overline{\lim}\; E\left(\bar{u}^n, C_r\backslash C_r(1-\delta)\right) \leqslant C\,\delta\,\bar{M} \text{ où } \bar{M} = \mathrm{Sup}\int\left|\nabla\bar{u}^n\right|^2$$

On considère ensuite les cubes C_r de Ω tels que $E\left(\bar{u}^n ; C_r\right) \geqslant K$.

Leur nombre est inférieur à $\bar{M}/K$. Soit $J(n,m)$ leur réunion.

En utilisant un argument de capacité on montre alors, qu'on a

$$|I(\underline{u}(n,m),\zeta)| \leqslant \sum_{C_r\subset J(n,m)}\int_{C_r(\eta_r)}\left|\frac{\partial\bar{u}^n-\partial\underline{u}(n,m)}{\partial n}\right|\,|\zeta|_{L^\infty}+O(1)+C\delta$$

Où η_r est choisi dans $\left[\frac{(1-\delta)}{m}, \frac{1}{m}\right]$ en appliquant le Théorème 5 à $\underline{u}(n,m) = \bar{u}^n$, et C_r : les estimées du théorème 5 permettent alors de conclure.

Bibliographie

[Bethuel 1] : The approximation problem for Sobolev maps between manifolds ; à paraître dans Acta Mathematatica.

[Bethuel 2] : Weak convergence of Palais-smale sequences for critical functionals ; en préparation.

[Brezis-Coron] : Multiple solutions of H. Systems and Rellich's conjecture Communication on Pure and applied mathematics, 37 (1984) p 149-187.

[Hildebrandt] : On the plateau problem for surfaces of constant mean curvature, Comm. Pure and Applied Math 23 (1970) p 97-114.

[Pacard] : Weak convergence of surfaces ; prépublication.

[Sachs-Uhlenbeck] The existence of Minimal Immersions of 2-spheres, Ann. Math 113 (1981) p 1-24.

[Schoen] : Analytic aspects of the Harmonic map problem, in Seminar on nonlinear PDE (Chern, ed.), Springer (1984).

[Wente] : Large solutions ot the volume constrained Plateau Problem, Archiv. Rat. Hech. Anal. 75 (1980) p 59-77.