

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FRÉDÉRIC KLOPP

## **Impuretés dans une structure périodique**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1990), p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1990\\_\\_\\_\\_A20\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1990____A20_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Impuretés dans une structure périodique.

par F.Klopp

Université de Paris-Sud

Département de Mathématiques Bat. 425

91405 Orsay

et U.R.A 760 CNRS.

Le problème qui nous intéresse ici est l'étude du spectre d'opérateurs du type suivant:

$$(1) P_t = -h^2 \Delta + V + t \delta V$$

où  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  et est  $L$ -périodique,  $L$  étant un réseau de  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq \delta V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  et  $t$  est un paramètre mesurant la taille de la perturbation.

Du point de vue de la physique,  $P_t$  est un hamiltonien semi-classique associé à une structure cristalline (représentée par  $V$ ) dans laquelle a été introduite une perturbation (représentée par  $\delta V$ ).

Cet opérateur a déjà été largement étudié, tant par les physiciens ([C], [LL], ...) que par les mathématiciens ([ADH], [DH], [GS], [Sk], [B], ...).

Dans le cas de la limite semi-classique, dans [S2], Simon a étudié la largeur de la première bande spectrale de  $P_0$ . Ses résultats ont été également obtenus par Outassourt qui, dans [O], a aussi démontré des résultats sur l'existence de valeurs propres pour  $P_t$  dans un gap de  $P_0$  ceci pour des perturbations pas trop petites.

Ce travail va surtout s'intéresser à l'existence de valeurs propres pour  $P_t$  dans un gap de  $P_0$  dans le cas de très petites perturbations.

Soit  $L$  un réseau c'est-à-dire  $L = \bigoplus_{1 \leq j \leq n} \mathbb{Z} u_j$  où  $(u_j)_{j \in [1, n]}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . On définit:  $L^* = \{ \alpha' \in (\mathbb{R}^n)^*; \forall \alpha \in L \alpha \cdot \alpha' \in 2\pi \mathbb{Z} \}$  et

$\mathbb{T} = (\mathbb{R}^n)^* / L^*$ .

On considère l'opérateur de Schrödinger suivant agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ :

$$(2) P = -\hbar^2 \Delta + V$$

avec  $V$  satisfaisant:

(H.1):  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; [0, +\infty[)$  telle que:  $V(x) = 0 \Leftrightarrow x \in L$  et  $V$  périodique sur le réseau  $L$  c'est-à-dire telle que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et tout  $\alpha$  dans  $L$ :  $V(x + \alpha) = V(x)$ . On suppose de plus que  $\text{Hess}(V)(0)$  est définie et positive, où  $\text{Hess}(V)$  désigne la matrice hessienne de  $V$ .

Par périodicité, pour tout  $\alpha \in L$ ,  $|\nabla V(\alpha)| = 0$  et  $\text{Hess}(V)(\alpha)$  est définie et positive. Par continuité de  $V$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $\delta \in [0, \varepsilon_0[$ , on a:

$$(3) \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) - \delta^2 \leq 0\} = \cup_{\alpha \in L} U_{\alpha, \delta}$$

où  $U_{\alpha, \delta} = U_{0, \delta} + \{\alpha\}$  et la famille de compacts  $(U_{\alpha, \delta})$  vérifie que si  $\alpha \neq \alpha'$  alors  $U_{\alpha, \delta} \cap U_{\alpha', \delta} = \emptyset$ .

Pour  $\alpha \in L$ , on définit  $\tau_\alpha: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  par  $(\tau_\alpha \psi)(x) = \psi(x - \alpha)$ . Par l'hypothèse (H.1), on a, pour tout  $\alpha$  dans  $L$ :

$$(4) \tau_{-\alpha} \circ P \circ \tau_\alpha = P.$$

On notera, pour  $\alpha \in L$ ,  $U_\alpha = U_{\alpha, 0} = \{\alpha\}$ ; on appellera les  $(\{\alpha\})_{\alpha \in L}$ , les puits de potentiel. On notera  $d(\cdot, \cdot)$ , la distance associée à la métrique d'Agmon  $\int V(x) dx^2$ . On définit:  $S_0 = \inf_{\alpha \neq 0} (d(\alpha, 0))$ .

Pour chaque  $\alpha$  dans  $L$ , on construit un opérateur de référence. Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, on prend  $\theta_0$  une fonction positive dans  $C_0^\infty(U_{0, \varepsilon})$  telle que, pour  $x \in U_{0, \varepsilon/2}$ ,

$$(5) \theta_0(x) = \varepsilon^2/4.$$

Si on note  $\theta_\alpha = \tau_\alpha(\theta_0)$  alors,

$$(6) V + \sum_{\alpha \in L} \theta_\alpha \geq \varepsilon^2/4.$$

On définit, pour  $\alpha \in L$ :

$$(7) P_\alpha = P + \sum_{\beta \neq \alpha} \theta_\beta$$

Pour tout  $\alpha$  dans  $L$ , on sait que  $P_\alpha$  est symétrique, borné inférieurement, essentiellement auto-adjoint sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Notons également  $P_\alpha$ , son extension auto-adjointe qui a pour domaine  $H^2(\mathbb{R}^n)$ .

Par un théorème de Persson [P], le spectre de  $P_\alpha$  est discret en dessous de  $\varepsilon^2/4$ .

Par construction, on a, pour tout  $\alpha \in L$ :

$$(8) P_\alpha = \tau_\alpha \circ P_0 \circ \tau_{-\alpha},$$

donc tous les  $P_\alpha$  ont le même spectre noté  $\sigma(P_0)$ .

Des résultats classiques ([HSj], [S1]), nous disent que la première valeur propre de  $P_0$  est simple. De plus, si on la note  $\mu$ , on sait qu'il existe  $h_0 > 0$ ,  $a > 0$  et  $\mu_0 > 0$  tels que, pour  $h \in ]0, h_0[$ :

$$(9) \sigma(P_0) \cap [\mu - 2a \cdot h, \mu + 2a \cdot h] = \{\mu\}$$

où  $\mu = \mu_0 h + O(h^2)$ .

On notera  $\psi_0$  un vecteur propre normalisé associé à  $\mu$ .

Notons  $F \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ , l'espace spectral associé à  $P$  et à  $[\mu - a \cdot h, \mu + a \cdot h]$  et  $\Pi_F$  la projection orthogonale sur  $F$ . On obtient alors

**Proposition 1:** Supposons (H.1) vérifiée. Alors, il existe  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $h \in ]0, h_0[$ ,  $P|_F$  est unitairement équivalent à  $\Omega$ , un opérateur de  $L^2(\mathbb{T})$  dans  $L^2(\mathbb{T})$  défini pour  $u \in L^2(\mathbb{T})$ , par  $\Omega(u) = \omega \cdot u$  où:

- (i)  $\omega$  est analytique réelle sur  $\mathbb{T}$  et analytique dans  $W(h)$ , un voisinage complexe de  $\mathbb{T}$  de la forme  $\mathbb{T} + iB(0, 1/Ch)$  où  $C$  est une constante positive ne dépendant pas de  $h$  et  $B(x, r)$  désigne la boule de centre  $x$  de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

De plus,  $(\omega)_{0 < h < h_0}$  est bornée dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $W(h)$ .

(ii)  $\limsup_{h \rightarrow 0} [h \log(\sup_{\theta \in \mathbb{T}} |\omega(\theta) - \mu|)] \leq -S_0$

(iii)  $\omega$  est paire et si  $\gamma \in L^*$  alors  $\gamma/2$  est un point critique de  $\omega$ .

(iv)  $\omega(\theta)$  est la valeur propre de Floquet du problème périodique.

**Esquisse de la preuve:** Grace à un travail de Carlsson [Ca], qui étend au cas d'une infinité de puits les constructions de Helffer et Sjöstrand [HSj], on construit une base orthonormale de  $F$  notée  $(v_\alpha)_{\alpha \in L}$ , en projetant  $\psi_0$  et ses translatées sur  $F$ . Or l'invariance de  $P$  par translation (4) nous dit que la matrice de  $P$  dans  $(v_\alpha)_{\alpha \in L}$  est une matrice de convolution, donc en conjuguant par la transformée de Fourier, on obtient l'équivalence unitaire annoncée.

L'analyticité de  $\omega$  sur un voisinage de  $\mathbb{T}$  découle de la décroissance exponentielle de  $v_\alpha$  hors du puit  $\{\alpha\}$ . Cette décroissance exponentielle donne aussi l'estimée (ii).

On remarque que la base des  $(v_\alpha)_{\alpha \in L}$  n'est autre que la base des fonctions de Wannier, ce qui nous dit que  $\omega$  est la valeur propre de Floquet. La parité de  $\omega$  est alors un résultat connu.

□

**Remarque:** Ce résultat a déjà été démontré d'autre manière séparément par Outassourt [O] et Simon [S2].

Nous allons maintenant nous intéresser à l'opérateur suivant:

$$(10) P_t = -h^2 \Delta + V + t \delta V = P + t \delta V$$

où l'on suppose que  $\delta V$  vérifie:

$$(H.2): 0 \leq \delta V \in C_0^\infty(\tilde{U}_{0, \varepsilon_0}), \delta V(0) > 0 \text{ et } \|\delta V\|_\infty = 1.$$

On note:  $S_{\delta V} = \inf_{\alpha \neq 0} [d(\text{supp}(\delta V), \alpha)] > 0$ .

Définissons  $F_t \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  l'espace spectral associé à  $P_t$  et  $[\mu - a \cdot h, \mu + a \cdot h]$ , et  $\Pi_{F_t}$  la projection spectrale sur  $F_t$ . On démontre

**Théorème 2:** Supposons (H.1) et (H.2) vérifiées. Alors, pour tout  $\gamma > 0$ , il existe  $h_\gamma > 0$  tel que pour tout  $h \in ]0, h_\gamma[$  et pour tout  $t \in ]-a \cdot h/8, a \cdot h/8[$ :

$P_t|_{F_t}$  est unitairement équivalent à  $\Omega_t: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$  défini par

$$\Omega_t f = \omega \cdot f + b(t) \Pi_0 f + K(t) f$$

avec:

(i)  $\omega = \omega(\theta)$  la valeur propre de Floquet définie par  $P$  dans  $[\mu - a \cdot h, \mu + a \cdot h]$ .

(ii)  $\Pi_0: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$  défini par:  $\Pi_0 f = (\text{Vol}(\mathbb{T}))^{-1} \int_{\mathbb{T}} f d\theta$  où  $d\theta$  est la mesure de Lebesgue.

(iii)  $K(t)$  est un opérateur de  $L^2(\mathbb{T})$  dans  $L^2(\mathbb{T})$  de noyau  $k(t, h, \theta, \theta')$  analytique sur  $D(0, a \cdot h/8) \times W(h) \times W(h)$ , où  $W(h)$  est défini dans la Proposition 1. Alors:

$$k(t, h, \theta, \theta') = \sum_{(\alpha, \beta) \in L \times L} (k_{\alpha, \beta}(t, h) e^{-i(\alpha \cdot \theta - \beta \cdot \theta')})$$

avec  $k_{\alpha, \beta}(t, h)$  vérifiant pour tout  $h \in ]0, h_\gamma[$ :  $k_{\alpha, \beta}(0, h) = 0$  pour tout

$(\alpha, \beta) \in L \times L$  et uniformément pour tout  $|t| < a \cdot h/8$ :

$$|\partial_t k_{\alpha, \beta}(t, h)| \leq e^{-(1-\gamma)[d(\text{supp}(\delta V), U_\alpha) + d(\text{supp}(\delta V), U_\beta)]/h} \text{ si}$$

$$(\alpha, \beta) \neq (0, 0) \text{ et } |\partial_t k_{0, 0}(t, h)| \leq e^{-2(1-\gamma)S_{\delta V}/h}.$$

(iv) L'application  $b(t)$  réalise une bijection analytique de  $D(0, a \cdot h/8)$  dans un voisinage complexe ouvert de 0.

**Esquisse de la preuve:** On va étudier  $P_t$  de la même manière que  $P$ .

Pour cela on construit des opérateurs de référence  $P_{t, \alpha}$  à partir des  $P_\alpha$  de

la façon suivante:

$$(11) \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ alors } P_{t,\alpha} = P_\alpha \text{ et } P_{t,0} = P_0 + t\delta V$$

c'est-à-dire que:

$$(12) P_{t,\alpha} = P_t + \sum_{L \ni \beta \neq \alpha} \tilde{\theta}_\beta \text{ où } \tilde{\theta}_\beta = \theta_\beta \text{ si } \beta \neq 0 \text{ et } \tilde{\theta}_0 = \theta_0 - t\delta V$$

Une étude de  $P_{t,0}$ , nous montre que, pour  $h$  assez petit et  $|t| < a \cdot h/2$ ,  $\sigma(P_{t,0}) \cap [\mu - a \cdot h, \mu + a \cdot h] = \{\mu_t\}$  où  $\mu_t$  est une valeur propre simple de  $P_{t,0}$ .

Puis grâce à ces opérateurs de référence, en projetant les fonctions de Wannier sur  $F_t$ , on construit  $(v_{t,\alpha})_{\alpha \in L}$ , une base orthonormale de  $F_t$ . On écrit alors la matrice de  $P_t$  dans cette base. Celle-ci est analytique en  $t$  pour  $|t| < a \cdot h/4$ . La dérivée de cette matrice s'écrit comme une perturbation compacte exponentiellement petite (pour  $h$  assez petit) d'une matrice de rang 1. On obtient ainsi l'équivalence unitaire annoncée en conjugant par la transformée de Fourier.

Les propriétés du noyau de  $K$  proviennent de la décroissance exponentielle de  $v_{t,\alpha}$  hors du puit  $\{\alpha\}$ .

□

**Remarque:** Pour  $t$  réel,  $K(t,h)$  est auto-adjoint et analytique en  $t$ . De plus,  $K(t,h)$  est compact et si on note:

$$\|K\|_\infty = \sup_{(t,\theta,\theta') \in D(0,a \cdot h/8) \times \mathbb{T} \times \mathbb{T}} |k(t,h,\theta,\theta')| \text{ alors:}$$

$$(13) h \log(\|K\|_\infty) \leq -S_\delta V + o(1) \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Par le théorème de Weyl, on sait:

$$(14) \sigma_{\text{ess}}(P_t) \cap [\mu - a \cdot h, \mu + a \cdot h] = \omega(\mathbb{T}) = \text{déf}[i,s].$$

On va s'intéresser au spectre de  $P_t$  contenu dans  $[\mu - a \cdot h, \mu + a \cdot h] \setminus \omega(\mathbb{T})$ , ceci pour  $t \in ]0, a \cdot h/8[$ , une étude tout à fait symétrique pouvant être menée pour  $t \in ]-a \cdot h/8, 0[$ . D'après (14), le spectre

de  $P_t$  dans  $[\mu - a \cdot h, i[ \cup ]s, \mu + a \cdot h]$  est discret. On démontre la

**Proposition 3:** Pour  $h$  suffisamment petit et  $t \in ]0, a \cdot h/8[$ , on a  $\sigma(P_t) \cap [\mu - a \cdot h, i[ = \emptyset$ .

Pour poursuivre cette étude, nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur  $\omega$ , à savoir

**(H.3):** (i)  $\omega$  n'admet que les éléments de  $((1/2)L^*)/L^*$  comme points critiques et de plus, ceux-ci sont non dégénérés.

(ii) Si  $f(h) = \sup_{\theta \in \mathbb{T}}(\omega(\theta)) - \inf_{\theta \in \mathbb{T}}(\omega(\theta)) = s - i$  alors:

$h \log(f(h)) = -S_0 + o(1)$  quand  $h \rightarrow 0$ .

(iii) Soit  $\tilde{\omega}(\theta) = (\omega(\theta) - \mu)/f(h)$ . Il existe  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  tel que, pour  $0 < h < h_0$ , on ait:

(\*)  $\tilde{\omega}$  n'atteint son maximum  $\tilde{s}$  qu'en un seul point noté  $\theta_s$ .

(\*\*)  $\max_{|\alpha| \leq 3} \sup_{\theta \in \mathbb{T}} |\partial_\alpha^\alpha \tilde{\omega}(\theta)| \leq C$  et  $|\det[\text{Hess}(\tilde{\omega}(\theta_s))]| > 1/C$ .

(\*\*\*) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  tel que:

$|\tilde{\omega}(\theta) - \tilde{s}| > \delta(\varepsilon)$  si  $|\text{dist}(\theta, \theta_s)| > \varepsilon$ .

**Remarque:** On peut montrer que de telles hypothèses sur  $\omega$  découlent naturellement d'hypothèses de symétrie sur le réseau  $L$ .

Notons  $D_s(\omega) = |\det(\text{Hess}(\tilde{\omega}(\theta_s)))|^{-1/2}$  et  $p = (\delta V \varphi_0 | \varphi_0)$ .

On obtient alors les deux théorèmes suivants:

**Théorème 4:** Supposons (H.1)–(H.3) vérifiées et  $n=1$  ou  $2$ . Alors, il existe  $h_0 > 0$  tel que pour  $h \in ]0, h_0[$ , il existe  $\lambda(t)$  une fonction croissante analytique réelle sur  $]0, a \cdot h/8[$  dans  $]s, \mu + a \cdot h]$  qui est valeur propre simple



de  $P_t$  et qui vérifie:

(1) si  $t/f(h) \rightarrow 0^+$ :

(i) si  $n=1$ :  $(\lambda(t)-s)/f(h) = (1+o(1)) \cdot C_1(h,t) \cdot (\rho t/f(h))^2$ ,

(ii) si  $n=2$ :  $(\lambda(t)-s)/f(h) = \exp(-(1+o(1)) \cdot C_2(h,t) \cdot (f(h)/(\rho t)))$ ,

(2) pour tout  $C > 1$ , il existe  $C' > 0$  tel que pour  $t \in ]f(h)/C, a \cdot h/8[$ , on a:

$$1/C' \leq \partial_t \lambda(t) \leq 1,$$

(3) si  $t/f(h) \rightarrow +\infty$  et  $t/h \rightarrow 0$ :  $\lambda(t) = s + (1+o(1)) \cdot (\rho t)$ .

De plus,  $C_n(h,t)$  vérifient que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h_\varepsilon > 0$  tel que pour  $h \in ]0, h_\varepsilon[$  et pour tout  $t \in ]0, a \cdot h/8[$ ,

(i)  $C_1(h,t) = (2^{1/2} \cdot \pi D_S(\omega) / \text{Vol} \mathbb{T})^2 \cdot (1 + O(e^{-(S_{\delta v} - \varepsilon)/h}))$ ,

(ii)  $C_2(h,t) = (\text{Vol} \mathbb{T} / (2\pi D_S(\omega))) \cdot (1 + O(e^{-(S_{\delta v} - \varepsilon)/h}))$ .

De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h_\varepsilon > 0$  tel que pour  $h \in ]0, h_\varepsilon[$  et pour  $t \in ]0, a \cdot h/8[$ ,  $\lambda(t)$  est la seule valeur propre de  $P_t$  dans  $]s + O(e^{-(S_{\delta v} - \varepsilon)/h})(\lambda(t) - s), \mu + a \cdot h]$ .

**Remarque:** En dimension 1 ou 2, quand  $t \rightarrow 0$ , B. Simon ([S3]) a déjà obtenu, pour les valeurs propres négatives de  $-\Delta + t\delta V$  pour  $\delta V$  négatif et à courte portée, des asymptotiques similaires à celles données en (1).

On définit  $I(\lambda) = (\text{Vol} \mathbb{T})^{-1} \int_{\mathbb{T}} (\lambda - \omega(\theta))^{-1} d\theta$  pour  $\lambda \in ]s, +\infty[$  si  $n=1$  ou 2 et pour  $\lambda \in ]s, +\infty[$  si  $n \geq 3$ .

**Théorème 5:** Supposons (H.1)–(H.3) vérifiées et  $n \geq 3$ . Alors, il existe  $h_0 > 0$  tel que, pour  $h \in ]0, h_0[$ , il existe une constante  $T_{\delta V} > 0$  et  $\lambda(t)$ , une fonction croissante analytique réelle sur  $]T_{\delta V}, a \cdot h/8[$  dans  $]s, \mu + a \cdot h]$  qui est valeur propre simple de  $P_t$ ; elles vérifient:

(1) si  $u=(t-T_{\delta V})/f(h) \rightarrow 0^+$ :

$$\text{si } n=3: (\lambda(t)-s)/f(h)=(1+o(1)) \cdot C_3(h,t) \cdot (\rho u)^2,$$

$$\text{si } n=4: (\lambda(t)-s)/f(h)=- (1+o(1)) \cdot C_4(h,t) \cdot (\rho u / \log(\rho u)),$$

$$\text{si } n \geq 5: (\lambda(t)-s)/f(h)=(1+o(1)) \cdot C_n(h,t) \cdot \rho u,$$

(2) pour tout  $C > 1$ , il existe  $C' > 0$  tel que pour  $t \in ]T_{\delta V} + f(h)/C, a \cdot h/8[$ , on a:

$$1/C' \leq \partial_t \lambda(t) \leq 1,$$

(3) si  $(t-T_{\delta V})/f(h) \rightarrow +\infty$  et  $t/h \rightarrow 0$ :  $\lambda(t) = s + (1+o(1)) \cdot (\rho t)$ .

De plus,  $T_{\delta V}$  et  $C_n(h,t)$  vérifient que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h_\varepsilon > 0$  tel que pour  $h \in ]0, h_\varepsilon[$  pour tout  $t \in ]0, a \cdot h/8[$ ,

$$(i) T_{\delta V} = \rho(I(s))^{-1} \cdot (1 + O(e^{-(S_{\delta V} - \varepsilon)/h})),$$

$$(ii) n \geq 5: C_n(h,t) = (-\partial_\lambda(I)|_{\lambda=s})^{-1} \cdot I(s)^2 \cdot (1 + O(e^{-(S_{\delta V} - \varepsilon)/h})),$$

$$(iii) C_4(h,t) = (\text{Vol} \mathbb{T}(I(s)f(h))^2 / (4\pi^2 D_S(\omega))) \cdot (1 + O(e^{-(S_{\delta V} - \varepsilon)/h})),$$

$$(iv) C_3(h,t) = (\text{Vol} \mathbb{T}(I(s)f(h))^2 / (2^{5/2} \cdot \pi^2 D_S(\omega)))^2 \cdot (1 + O(e^{-(S_{\delta V} - \varepsilon)/h})).$$

Pour  $t \in ]0, T_{\delta V}[$ , on a,  $\sigma(P_t) \cap ]s, \mu + a \cdot h] = \emptyset$ . Si  $n \geq 5$ ,  $\lambda(T_{\delta V}) = s$  est une valeur propre de  $P_{T_{\delta V}}$ .

De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h_\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $h \in ]0, h_\varepsilon[$ , il existe une constante positive  $\tau_{\delta V}$  vérifiant:  $\tau_{\delta V} \geq f(h) \cdot e^{(S_{\delta V} - \varepsilon)/h}$ , telle que, pour  $t \in ]T_{\delta V}, \tau_{\delta V}[$ ,  $\lambda(t)$  est la seule valeur propre de  $P_t$  dans  $]s, \mu + a \cdot h]$ , et pour  $t \in ]\tau_{\delta V}, a \cdot h/8[$ ,  $\lambda(t)$  est la seule valeur propre de  $P_t$  dans  $]s + O(e^{-(S_{\delta V} - \varepsilon)/h})(\lambda(t) - s), \mu + a \cdot h]$ .

**Remarque:** En dimension 3 ou plus, quand  $t \rightarrow 0$ , M. Klaus et B. Simon ([KS]) ont obtenus, pour les valeurs propres négatives de  $-\Delta + t\delta V$  dans le cas où  $\delta V$  est négatif et à courte portée, des asymptotiques similaires à celles données en (1).

**Esquisse de la preuve:** Pour prouver les Théorèmes 4 et 5, on utilise d'abord la réduction donnée par le Théorème 3 pour se ramener à l'étude du spectre d'un opérateur  $\tilde{\Omega}_t: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$  défini par, pour  $f \in L^2(\mathbb{T})$ ,

$$(15) \quad \Omega_t f = \omega \cdot f + t(\Pi_0 f + K(t)f).$$

Pour étudier  $\sigma(\tilde{\Omega}_t) \cap ]s, \mu + a \cdot h]$ , on applique le principe de Birman-Schwinger à  $\tilde{\Omega}_t$  c'est-à-dire:

(16) ( $\lambda \in \sigma(\tilde{\Omega}_t) \cap ]s, \mu + a \cdot h]$  et  $\lambda$  est de multiplicité  $m$ ) si et seulement si

$$(1 \in \sigma(\Gamma_{\lambda, t}) \text{ et } 1 \text{ est de multiplicité } m)$$

où  $\Gamma_{\lambda, t}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$  défini par, pour  $f \in L^2(\mathbb{T})$ ,

$$(17) \quad \Gamma_{\lambda, t} f = t \cdot ((\lambda - \omega(\theta))^{-1/2} (\Pi_0 + K(t)) (\lambda - \omega(\theta))^{-1/2}) f.$$

On est alors essentiellement amené à étudier les valeurs propres d'une perturbation compacte exponentiellement petite d'un opérateur de rang 1.

□

**Remarque:** Il convient également de faire remarquer que,  $\lambda(t)$  étant simple, si on note  $\varphi_t$  un vecteur propre unitaire associé à  $\lambda(t)$  alors

$$(18) \quad \partial_t \lambda(t) = (\delta V \varphi_t | \varphi_t).$$

Alors les Théorèmes 4 et 5 (et leurs démonstrations), nous disent que  $\varphi_t$  est localisée au voisinage de  $\text{supp}(\delta V)$  quand  $(t - T_{\delta V})/f(h)$  est grand. Par contre, quand  $(t - T_{\delta V})/f(h) \rightarrow 0$ ,  $\varphi_t$  est localisée au voisinage de  $\text{supp}(\delta V)$  en dimension plus grande que 5 alors que dans les dimensions 1 à 4,  $\varphi_t$  se "délocalise".

**Remerciements:** Je tiens à remercier J. Sjöstrand pour l'aide qu'il m'a apportée durant tout ce travail.

**Références:**

- [ADH] S. Alama, P. Deift, R. Hempel, Eigenvalue branches of the Schrödinger operator  $H - \lambda W$  in a gap of  $\sigma(H)$ . *Comm. Math. Phys.*, 121, 1989, 291–321.
- [B] F. Bentosela, Scattering from impurities in a crystal., *Comm. Math. Phys.* 46, 1976, 153–166.
- [C] J. Callaway, *Energy Band Theory.*, Academic Press, New York/London, 1964.
- [Ca] U. Carlsson, An infinite number of Wells in the semi-classical limit, Preprint de l'université de Lund, 1989 (à paraître dans *Asymptotic Analysis*).
- [DH] P. Deift, R. Hempel, On the existence of eigenvalues of the Schrödinger operator  $H - \lambda W$  in a gap of  $\sigma(H)$ . *Comm. Math. Phys.*, 103, 1986, 461–490.
- [GS] F. Gesztesy, B. Simon, On a theorem of Deift and Hempel., *Comm. Math. Phys.* 116, 1988, 503–505.
- [HSj] B. Helffer, J. Sjöstrand, Multiple wells in the semi-classical limit 1, *Comm. P.D.E* 9(4) 1984, 337–408.
- [KS] M. Klaus, B. Simon, Coupling constant thresholds in non relativistic quantum mechanics., *Ann. of Phys.* 130, 1980, 251–281.
- [LL] L. Landau, E. Lifschitz, *Mécanique quantique, théorie non relativiste*, Editions MIR, Moscou, 1966.
- [O] A. Outassourt, Comportement semi-classique pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique, *J. Funct. Anal.* 72, 1987, 65–93.
- [P] A. Persson, Bounds for the discrete part of the spectrum of a semi-bounded Schrödinger operator, *Math. Scand.* 8, 1960, 143–153.
- [S1] B. Simon, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I.

Nondegenerate minima: Asymptotic expansion., Annales I.H.P  
38(3), 1983, 295–307.

- [S2] B. Simon, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues III.  
Width of the ground state band in strongly coupled solids.,  
Ann. of Phys. 158(2), 1984, 415–420.
- [S3] B.Simon, The bound state of a weakly coupled Schrödinger  
operator in one or two dimensions., Ann. of Phys. 97, 1976,  
279–288.
- [Sk] M.M. Skriganov, Geometric and arithmetic methods in the  
spectral theory of multidimensional periodic operators., Proc. of  
the Steklov Inst. of Math., 2, 1987.