JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ROGER GAY

Inversion de la transformation de Pompeiu locale

Journées Équations aux dérivées partielles (1989), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1989____A16_0>

Inversion de la transformation de Pompéiu locale

R. GAY

Dans cet exposé nous allons résumer le contenu des articles [1] [2] [3] faits en collaboration avec C.A. BERENSTEIN ou C.A. BERENSTEIN et A. YGER.

I - Introduction.

Nous nous intéresserons au problème, connu comme le "problème de Pompéiu", dont voici une version suffisamment générale :

Soient D un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $E_1,\ldots,E_N$ une collection de compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue strictement positive et $M(n)$ le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^n$. On suppose que chacun des ensembles ouverts de $M(n)$:

$$G_j(D) = \{g \in M(n) : gE_j \subset D\}$$

est non vide $(1 \leq j \leq N)$. On appelle alors "transformation de Pompéiu" (relativement à ces données) l'application :

$$P : C(D) \to \bigoplus_{1 \leq j \leq N} C(G_j(D))$$

définie par $P(f) = (P_1(f),\ldots,P_N(f))$ et

$$P_j(f)(g) = \int_{gE_j} f\,dx \qquad (g \in G_j(D)) \qquad (1 \leq j \leq N)$$

(si X est un espace topologique $C(X)$ désigne l'ensemble des fonctions complexes continues dans X).

Si $D = \mathbb{R}^n$ on parle de transformation globale et on parle de transformation locale dans le cas contraire.

Si l'on désire un support intuitif on peut imaginer que les E_j sont des instruments de mesure que l'on installe de toutes les façons possibles dans D afin de mesurer le "signal" f en le moyennisant sur les déplacés gE_j de E_j.

On se pose maintenant deux questions :

(1) - L'application P est-elle injective ? ou encore : si l'on sait que toutes les mesures P_j (f) sont nulles, peut-on affirmer que f est nulle ?

Si la réponse est oui on dira que la collection $E_1,\ldots,E_N$ possède la propriété de Pompéiu, globale ou locale, selon que $D = \mathbb{R}^n$ ou non.

(2) - Peut-on restituer f à partir des mesures $P_j(f)$?

Avant d'aborder le cas local nous allons rappeler, très brièvement, les points principaux des résultats globaux.

II - Un bref rappel des résultats globaux.

Comme il est bien connu, l'histoire commence avec D. Pompéiu qui pose le problème global 1) pour un seul ensemble E et qui affirme que la réponse est oui si E est un disque. Ce n'est que plus tard que Chakalov donna un contre-exemple dans ce cas. Néanmoins Pompéiu prouve que, sous l'hypothèse additionnelle de l'existence de la limite de f à l'infini, la seule fonction continue f dans $\mathbb{R}^2$ dont les intégrales sur les déplacés d'un carré sont nulles est la fonction nulle.

Vers les années 1972 paraissent deux articles fondamentaux dans ce genre de questions ([6], [8]). L'étude du problème (1) y est placée dans son cadre naturel de l'analyse harmonique et le théorème de synthèse de L. Schwartz apparaît comme l'ingrédient obligé auquel on se ramènera d'une manière ou d'une autre. Rappelons que ce théorème affirme qu'un idéal sans zéro de $(\mathcal{E}'(\mathbb{R}))$^ est dense dans cette algèbre.

A titre de prototype des nombreux résultats obtenus, nous nous contentons de citer :

a) Dans le cas de la question globale (1) et pour un seul ensemble E :
Si E est une région polygonale ou bien si E est un ensemble convexe ayant au moins "un coin", alors E possède la propriété de Pompéiu globale.

b) Dans le cas de la question globale (1) et pour plusieurs ensembles $E_1,\ldots,E_N$:

Si $0<r_1<r_2$ et si les transformées de Fourier des deux distributions radiales $\chi_{\overline{B}(0,r_1)}$ et $\chi_{\overline{B}(0,r_2)}$ n'ont pas de zéro commun dans $\mathbb{C}^n$, alors $E_1 = \overline{B}(0,r_1)$ et $E_2 = \overline{B}(0,r_2)$ est une collection de deux compacts de $\mathbb{R}^n$ possédant la propriété de Pompéiu globale (théorème des deux disques).

Rappelons que la condition $\hat{\chi}_{\overline{B}(0,r_1)}$ et $\hat{\chi}_{\overline{B}(0,r_2)}$ ont sans zéro commun se lit directement sur les rayons r_1 et r_2 des boules de la façon suivante : il en est ainsi si et seulement si r_1/r_2 est distinct de tous les quotients λ/μ des zéros positifs de la fonction de Bessel $J_{n/2}$ qui forment un ensemble exceptionnel Z_n(ces zéros admettent le développement asymptotique $(2k+1)\pi/2 +(2.\frac{n}{2}+1)\pi/4 + O(1/k)$).

La question (2) de déconvolution globale n'a, à notre connaissance, suscité que peu de travaux, ayant tous un lien direct avec ([6]). Ce qui est prouvé est, essentiellement, dans le cas de deux boules $\overline{B}(0,r_1) = E_1$ et $\overline{B}(0,r_2) = E_2$ où $0<r_1<r_2$ sont tels que r_1 / r_2 soit mal approché par les éléments de Z_2 (ce qui signifie qu'il existe $C>0$ tel que $|r_1 / r_2 - \lambda/\mu| \geq C/|\mu|^2$ pour tout $\lambda/\mu \in Z_2$), l'existence et l'expression <u>explicite</u> de deux distributions radiales v_1, v_2 d'ordre majoré par 6 à support contenu dans $\overline{B}(0,r_2)$ et $\overline{B}(0,r_1)$ respectivement telles que :

$$\delta = v_1 * \chi_{\overline{B}(0,r_1)} + v_2 * \chi_{\overline{B}(0,r_2)} \cdot$$

Observons que la condition arithmétique traduit la condition nécessaire et suffisante de Hörmander :

$$|\hat{\chi}_{\overline{B}(0,r_1)}(\xi)| + |\hat{\chi}_{\overline{B}(0,r_2)}(\xi)| \geq C \frac{e^{-\varepsilon|\operatorname{Im}\xi|}}{(1+|\xi|)^{\varepsilon}} \quad (\xi\in\mathbb{C}^2)$$

pour que $\hat{\chi}_{\overline{B}(0,r_1)}(\xi)$ et $\hat{\chi}_{\overline{B}(0,r_2)}(\xi)$ engendrent $(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2))^\wedge$.

III - Deux précisions techniques.

Dans ce paragraphe nous précisons, dans le but d'un usage ultérieur, la notion de distribution inversible et la transformation de Fourier-Bessel.

a - Une distribution $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est dite inversible si la condition : $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{S}/\hat{T}$ est une fonction entière dans $\mathbb{C}^n$ implique que cette fonction entière est élément de $(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))^\wedge$ de la forme $\hat{R}$ pour une $R\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $S = T*R$.

Cette propriété est exprimable par l'inégalité : Il existe $a>0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sup\{|\hat{T}(\zeta)| : |\zeta-\xi| \leq a \log(2+|\xi|)\} \geq \frac{1}{(a+|\xi|)^a}$$

b - Nous conviendrons d'écrire un "petit zéro" en indice pour indiquer que nous ne considérons que des éléments radiaux. Ainsi $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)_o$ désigne l'ensemble des distributions radiales dans $\mathbb{R}^n$ et $(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))^{\wedge}_o$ désigne la sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)^{\wedge}$ constituée des fonctions invariantes par $\mathcal{O}(n)$ (i.e. $F(A(\xi)) = F(\xi)$ pour $A \in \mathcal{O}(n)$) $A(\xi+i\eta) = A(\xi)+iA(\eta)$ pour $\zeta = \xi+i\eta \in \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$). Il est bien connu que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)_o$ sur $(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))^{\wedge}_o$ ($\mathcal{F}(T)(\xi) = \langle T_x, e^{-i(x|\zeta)}\rangle$ avec $(x|\zeta) = \sum_{1\leq j\leq n} x_j \zeta_j$).

Soit s l'application de $(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))^{\wedge}_o$ sur $(\mathcal{E}'(\mathbb{R}))^{\wedge}_o$ définie par $SF(t)=F(t,0,\ldots,0)$. Cette application est bijective et d'inverse S^{-1} déterminée par $(S^{-1} f)(\xi) = f((\zeta_1^2+\ldots+\zeta_n^2)^{1/2})$. La transformée de Fourier-Bessel $\mathcal{F}B : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)_o \to (\mathcal{E}'(\mathbb{R}))^{\wedge}_o$ est alors la transformation $S\circ\mathcal{F}$. L'opérateur B qui rend commutatif le diagramme suivant est dit opérateur de transmutation :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)_o \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}B"] & (\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))^{\wedge}_o \arrow[d, "S"] \\
\mathcal{E}'_o(\mathbb{R}) \arrow[u, "B"] \arrow[r, "\mathcal{F}"] & (\mathcal{E}'(\mathbb{R}))^{\wedge}_o
\end{tikzcd}$$

Si φ est une fonction radiale, on a :

$$\mathcal{F}B(\varphi)(t) = \tilde{\varphi}(t) = (2\pi)^{n/2} \int_0^\infty \varphi(\rho)\, j_{n-2/2}(\rho t)\, \rho^{n-1}\, d\rho \quad (t \in \mathbb{C})$$

avec $j_\nu(z) = J_\nu(z)/z^\nu$ où J_ν est la fonction de Bessel d'indice ν. Plus généralement, si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)_o$, on a :

$$\mathcal{F}B(T)(t) = \tilde{T}(t) = \langle T_x, j_{n-2/2}(|x|t)\rangle \quad t \in \mathbb{C}.$$

IV - Question d'injectivité - cas local.

La difficulté principale que l'on rencontre dans l'étude locale est la perte de la possibilité de l'utilisation immédiate de la structure de groupe ramenant au théorème de Schwartz. Afin d'illustrer une méthode possible nous allons donner, dans le cas très particulier des deux disques, les étapes essentielles de la démonstration du résultat suivant :

Théorème ([1]) -

Soient $(\mu_j)_{j\geq 1}$ *une suite de distributions radiales et* $R > 0$ *tels que*

1) μ_1 *soit inversible et telle qu'il existe* $C > 0$ *pour laquelle* $\widehat{\mu_1}(t) = 0$ *implique* $|\mathrm{Im}\, t| \leq C \log(2 + |t|)$.

2) *Si* $CV(supp(\mu_j)) = \overline{B}(0,r_j)$ $(j\geq 1)$ *alors :*

$$r_1 + \sup_{j\geq 1} r_j < R$$

3) $\{\zeta\in \mathbb{C}^n : \mu_j(\zeta) = 0 ; j \geq 1\} = \emptyset.$

Alors la seule distribution $T\in \mathcal{D}'(0,R)$ *telle que* $\mu_j * T$ *soit la distribution nulle dans* $B(0,R-r_j)$ $(j\geq 1)$ *est la distribution nulle.*

Pour donner une idée de la preuve, considérons $0<r_1<r_2<R$ avec $r_1/r_2 \notin Z_n$ et $0<r_1+r_2<R$ et soit $f\in \mathbb{C}^\infty(B(0,R))$ telle que :

$$(\mu_{r_i} * f)(x) = \int_{\overline{B}(x,r_i)} f\, dx = 0$$

pour $|x| < R - r_i$ $(i = 1,2)$.

(On se ramène aisément au cas C^∞ par régularisation).
Pour démontrer que $f = 0$ il suffit de prouver que les moyennes $\lambda_{|y|/2}(f,y/2)$ de f sur les sphères de centre $y/2$ et rayon $|y|/2$ passant par 0, $y\in B(0,R)$, sont toutes nulles. On achève alors en utilisant l'injectivité de la transformation de Radon par les sphères de Mc Cormack et Quinto ([ ]) qui assure que la nullité de ces moyennes implique la nullité de f.

Désignons par σ_ρ la mesure uniformément répartie et de masse 1 sur la sphère $\partial B(0,\rho)$ de telle sorte que la moyenne de f sur $\partial B(x,\rho)$ s'exprime par :

$$\lambda_\rho(f,x) = (\sigma_\rho * f)(x)\,.$$

Convenons d'écrire μ_{r_i} pour $\chi_{\overline{B}(0,r_i)}$. On a $\widehat{\mu}_{r_i}(t) = C_n\, j_{n/2}(r_i t)$ avec $C_n = n2^{n-2/2}$ $\Gamma(n/2)$.

Nous désignerons par $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ les zéros de $\widetilde{\mu}_{r_1}$. Nous introduisons alors les distributions radiales, à support compact, T_k définies par $(\Delta+\lambda_k^2)\, T_k = -\mu_{r_1}$ ce qui est équivalent encore à $(t^2 - \lambda_k^2)\, \widetilde{T}_k\,(t) = \widetilde{\mu}_{r_1}\,(t)$. L'ellipticité de $\Delta + \lambda_k^2$ assure que $\mathrm{supp}(T_k) \subset \overline{B}(0,r_1)$,

A l'aide des T_k $(k \geq 1)$ nous établissons une équation de division, pour tout $\rho > 0$:

$$\sigma_\rho = \nu_\rho + \mu_{r_1} * S_\rho$$

où ν_ρ est donnée explicitement par l'une des deux expressions :

$$\nu_\rho = - \sum_{k\geq 1} \frac{\widetilde{\sigma}_\rho(\lambda_k)}{\lambda_k^2 \widetilde{T}_k(\lambda_k)}\, \Delta T_k$$

$$\widetilde{\nu}_\rho\,(t) = \sum_{k\geq 1} \frac{\widetilde{\sigma}_\rho(\lambda_k)}{\lambda_k^2 \widetilde{T}_k(\lambda_k)}\, \frac{t^2 \widetilde{\mu}_{r_1}(t)}{t^2 - \lambda_k^2}$$

et $\mathrm{supp}(\,S_\rho) \subset \overline{B}(0,\mathrm{Max}(\rho,r_1)-r_1)$ comme on le voit à l'aide du théorème des supports. (On observera que $\widetilde{\nu}_\rho$ interpole $\widetilde{\sigma}_\rho$ sur les λ_k , les facteurs λ_k^2 et t^2 assurant la convergence dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)_o$).

On approche à présent f dans $C^\infty(B(0,R))$ par une suite d'exponentielles-polynômes P_j solution de $\mu_{r_1} * f = 0$ de la forme :

$$P_j\ (x) = \sum_{\ell,m} C_{j,\ell,m}\ e^{i(x|\zeta_{j,\ell,m})}$$

avec $C_{j,\ell,m} \in \mathbb{C}$ et $\zeta_{j,\ell,m} \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$[(\zeta_{j,\ell,m})_1]^2 + \dots + [(\zeta_{j,\ell,m})_n]^2 = \lambda_\ell^2$$

de telle sorte que $\widehat{T}_k(\zeta_{j,\ell,m}) = \widehat{T}_k(\lambda_\ell)$ soit nul si $\ell \neq k$ et non nul si $k=\ell$. On obtient, pour $|x| < R - r_1$:

$$(T_k * f)(x) = \lim_{j\to\infty} \sum_{\ell,m} C_{j,\ell,m}\, \widetilde{T}_k(\lambda_\ell)\, e^{i(x|\zeta_{j,\ell,m})}$$

$$= \widetilde{T}_k(\lambda_k) \lim_{j\to\infty} \sum_m C_{j,k,m}\, e^{i(x|\zeta_{j,k,m})}.$$

En convolant par μ_{r_2} , qui est tel que $\tilde{\mu}_{r_2}(\lambda_k) \neq 0$, on obtient, pour $|x| < R - r_1 - r_2$

$$(T_k * \mu_2 * f)(x) = 0 = \mu_2(\lambda_k)\tilde{T}_k(\lambda_k) \lim_{j \to \infty} \sum_m C_{j,k,m}\, e^{i(x|\zeta_{j,k,m})}.$$

Aussi $(T_k * f)(x) = 0$ pour $|x| < R - r_1 - r_2$.

On observe alors que $(\Delta + \lambda_k^2)\ (T_k * f)(x) = -(\mu_{r_1} * f)(x) = 0$ dans $|x| < R - r_1$. Alors, par analyticité provenant de l'ellipticité de $\Delta+\lambda_k^2$, on trouve que $(T_k * f)(x) = 0$ pour $|x| < R - r_1$.

Enfin, en utilisant $\sigma_\rho = \nu_\rho + \mu_{r_1} * S_\rho$ on arrive à :

$$\lambda_\rho(f,x) = (\sigma_\rho * f)(x) = (\nu_\rho * f)(x) = 0$$

pour $|x| < R - r_1$ et $\rho + |x| < R$ (ne pas oublier que $\mathrm{supp}(S_\rho) \subset B(0, \mathrm{Max}(\rho, r_2) - r_1)$ d'où il découle directement que $f(x) = 0$ si $|x| < R - r_1$ en faisant tendre ρ vers zéro et $\lambda_{(y)/2}(f, y/2) = 0$ pour $|y| < R$, ce qui permet d'utiliser les résultats de Mc Cormarck et Quinto pour conclure, définitivement, à $f = 0$.

Pour finir le paragraphe concernant l'injectivité de la transformation de Pompéiu locale nous allons considérer le cas d'un seul ensemble compact E .

Il est évident que pour espérer la propriété locale pour E celui-ci doit vérifier la propriété globale.

On dispose du résultat suivant :

Théorème ([4],[7]).

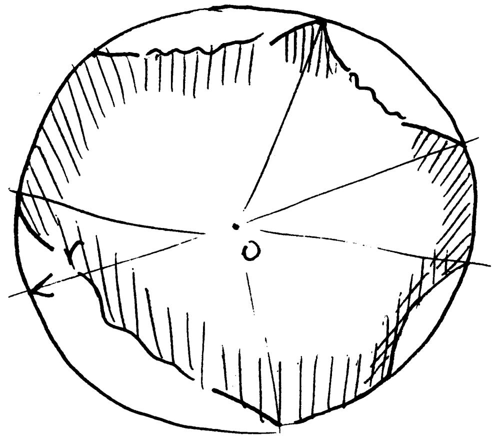
Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne tel que $\overline{\Omega}^c$ soit connexe. Une condition nécessaire et suffisante pour que $E = \overline{\Omega}$ vérifie la propriété de Pompéiu globale est qu'il n'existe pas de valeur propre (strictement positive) du problème de Neumann surdéterminé :

$$\begin{cases} \Delta u + \alpha u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 1 \ \text{ et } \ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Un corollaire immédiat est qu'une boule ne vérifie pas la propriété de Pompéiu.

Un corollaire beaucoup moins immédiat ([7]) est que, pour un ouvert tel que ci-dessus, si $\partial\Omega$ n'est pas une hypersurface analytique réelle alors Ω possède la propriété de Pompéiu globale.

Ceci nous a conduit à chercher si des ensembles $E = \overline{\Omega}$ du type suggéré par le dessin ci-dessous n'aurait pas la propriété locale de Pompéiu :



Pour un tel ensemble de "rayon extérieur" r on introduit la "radialisée" :

$$\varphi_E(\rho) = \sigma_\rho(E \cap \partial B(0,\rho)) \qquad 0 \leq \rho \leq r.$$

Des conditions géométriques naturelles conduisent à un développement limité :

$$\varphi_E(\rho) = L + B(r-\rho)^\alpha (1 + \gamma(\rho))$$

pour $0 \leq a \leq \rho < r$ avec $\alpha > 0$, $L \geq 0$, $B > 0$, γ assez régulière telle que $\gamma(r) = 0$ qui permettent une étude précise du comportement asymptotique de $\tilde{\varphi}_E$ prouvant que la distribution radiale φ_E est inversible et a ses zéros dans une bande logarithmique $|\mathrm{Im}\, t| \leq C \log(2+|t|)$. En faisant alors intervenir la suite des distributions radialisées des distributions $D^\alpha \chi_E$ dont les transformées de Fourier sont sans zéro commun comme conséquence du fait que E vérifie la propriété de Pompéiu globale, on prouve :

Théorème ([2]).

Soit Ω *un ouvert borné tel que* $E = \overline{\Omega}$ *possède la propriété de Pompiéu globale et tel que sa radialisée s'écrive :*

$$\varphi_E(\rho) = L + B(r - \rho)^{\alpha} (1 + \gamma(\rho)) \quad 0 \le a \le \rho < r$$

avec $\alpha>0$, $L\geq 0$, $B>0$, γ *de classe* C^{k+1} *avec* $k = [\alpha]$ *telle que* $\gamma(r) = 0$ *et* γ *possédant une dérivée d'ordre* $k+2$ *intégrable. Alors* Ω *possède la propriété de Pompéiu locale dans toute boule* $D = B(x,R)$ $(R>2r)$ $(x\in \mathbb{R}^n)$.

Un corollaire amusant dont nous ne connaissons pas de preuve élémentaire est le suivant (petit théorème de Morera) :

Soit T un triangle dont le rayon du cercle circonscrit est $r>0$. Soit, d'autre part, $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que, pour tout déplacement $g\in M(2)$ tel que $gT\subset B(0,R)$ on ait (avec $R>2r$) :

$$\int_{gT} f(z)\, dz = 0 .$$

Alors f est holomorphe dans $B(0,R)$.

V - *Question de déconvolution - Cas local.*

Dans l'état actuel des choses nous sommes seulement capables de reconstruire $f\in \mathcal{C}^{\infty}(B(0,R))$ dans le cas des mesures prises à l'aide de deux disques de rayons r_1 et r_2 tels que $0<r_1 < r_2$, $r_1 / r_2 \notin Z_n$ et $R>r_1+ r_2$ ou bien dans le cas de mesures prises à l'aide d'un seul carré de côté $2a$ tel que $2\sqrt{2a} < R$ ([3]).

Notre reconstruction se fait par approximation, avec estimation de l'erreur, de chaque coefficient du développement en harmoniques sphériques de

$$\omega\in S^{n-1} \to f(r\omega)$$

pour chaque $r\in [0,R[$; elle utilise le résultat que voici :

Théorème ([3]) .

Soient $R>0$, $0<r_1 < r_2$, $r_1 / r_2 \notin E_n$, $r_1+r_2<R$. *Soit* $(R_k)_{k\geq 0}$ *une suite croissante de nombres réels telle que :* $0 = R_o< r_1+r_2< R_1< R_2< \ldots$ *et qui converge vers* R . *Soit* S_m *une harmonique sphérique normalisée de degré* m . *Pour tout* $k\geq 1$ *et* $r\in [R_{k-1}, R_k[$ *on peut trouver deux suites de distributions* $(U_\ell)_{\ell\geq 1}$ *et* $(V_\ell)_{\ell\geq 1}$ *radiales et* *<u>explicites</u>* *telles que :*

i) $\operatorname{supp}(U_\ell) \subset B(0,R- r_1)$ et $\operatorname{supp}((V_\ell)\subset B(0,R- r_2)$;

ii) on ait les inégalités, pour tout $\ell\geq 1$ et toute $f\in C^{\infty}(B(0,R))$

$$\left| \int_{S^{n-1}} f(r\omega)S(\omega)d\sigma_1(\omega) - \langle U_\ell, \mu_{r_1} * f\rangle - \langle V_\ell, \mu_{r_2} * f\rangle \right| \le$$

$$\le \frac{\gamma}{\ell} \frac{1}{(R-r)^N} \frac{1}{r^{n-3/2}} \underset{\substack{|\alpha|\le N \\ |x|\le R'_k}}{\mathrm{Max}} |D^\alpha f(x)|$$

avec $\gamma = \gamma(r_1, r_2, R, n, R_1) > 0$

$$N = [\frac{n+13}{2}] + 1$$

$$R'_k = \frac{2}{3} R + \frac{1}{3} R_k .$$

Voici les étapes principales de la preuve de ce théorème :

Il existe un polynôme harmonique homogène H_m de degré m tel que :

$$|x|^m S_m(\omega) = H_m(x)$$

avec $x = |x|\omega$, $\omega \in S^{n-1}$. L'intégrale

$$a_m(r) = \int_{S^{n-1}} f(r\omega) S_m(\omega) d\sigma_1(\omega)$$

$(0 \le r < R)$ s'écrit encore comme l'action de la distribution $H_m \sigma_r / r^m$ sur f . On observe alors que $H_m \sigma_r / r = \gamma_m H_m (\frac{\partial}{\partial x})(T_{r,m})$ où

$$T_{r,m}(y) = (r^2 - |y|^2)^{m-1} \chi_{\overline{B}(0,r)}(y)$$

de telle sorte que

$$a_m(r) = \gamma_m \langle H_m (\frac{\partial}{\partial x}) T_{r,m} , f\rangle$$

avec

$$\gamma_m = \frac{(-1)^m r^{2-n-m}}{2^{m-1}(m-1)!(2\pi)^{n/2}\Gamma(n/2)} .$$

L'idée consiste à écrire, explicitement;

$$T_{r,m} = \lim_{\ell \to +\infty} \varphi_\ell * \mu_{r_1} + \psi_\ell * \mu_{r_2}$$

avec $\mathrm{supp}(\varphi_\ell) \subset B(0, R-r_1)$ et $\mathrm{supp}(\psi_\ell) \subset B(0, R-r_2)$.

Pour réaliser cet objectif on passe aux transformées de Fourier-Bessel :

$$\widetilde{T}_{r,m}(t) = (2\pi)^{n/2}\, 2^{m-1}\, (m-1)!\, r^{n+2m-2}\, j_{n/2+m-1}(rt)$$
$$\widetilde{\mu}_{r_i}(t) = C_n\, j_{n/2}(r_i t)$$

et on "divise", explicitement, $j_{n/2+m-1}(rt)$ par $j_{n/2}(r_1 t)$ et $j_{n/2}(r_2 t)$:

$$j_{n/2+m-1}(rt) = \lim_{\ell\to+\infty} \{ j_{n/2}(r_1 t)\, \widetilde{\mu}_\ell)(t) + j_{n/2}(r_2 t)\, \widetilde{\nu}_\ell(t) \}$$

avec contrôles sur $\widetilde{\mu}_\ell(t)$, $\widetilde{\nu}_\ell(t)$ et sur la différence $j_{n/2+m-1}(rt) - ((j_{n/2}(r_1 t)\, \widetilde{\mu}_\ell(t) + j_{n/2}(r_2 t)\, \widetilde{\nu}_\ell(t))$.

On part de la formule de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{j_{n/2+m-1}(r\zeta)}{\zeta-t}\, d\zeta = \begin{cases} j_{n/2+m-1}(rt) & |t|<\rho \\ 0 & |t|>0 \end{cases}$$

en y introduisant la fonction :

$$\theta_k(\zeta) = j_{n/2}(r_1 \zeta)\, j_{n/2}(r_2 \zeta)\, j_{n/2+m-1}(\varepsilon_k(r_1+r_2)\zeta)$$

avec $R_k = (1+(\varepsilon_k))$.

La fonction θ_k est correctement minorée sur les ensembles $\{|\zeta| = \rho_\ell\} \cup \{|\mathrm{Im}\zeta| \geq 1\}$ (où $(\rho_\ell)_{\ell\geq1}$ est une suite convenable de réels qui tend strictement vers $+\infty$) par des expressions de la forme :

$$A|\zeta|^{-1/2(3n+1+2m)}\, e^{R_k|\mathrm{Im}\zeta|}.$$

On écrit :

$$\frac{j_{n/2+m-1}(r\zeta)}{\zeta - t} = \frac{j_{n/2+m-1}(r\zeta)}{\zeta^q\theta_k(\zeta)}\, \frac{\zeta^q\theta_k(\zeta)-t^q\theta_k(t)}{\zeta - t} + t^q\,\theta_k(t)\, \frac{j_{n/2+m-1}(r\zeta)}{\zeta^q\theta_k(\zeta)(\zeta-t)}$$

avec $q = n+3$ si n est impair et $q = n+4$ si n est pair.

On considère les fonctions entières :

$$H_{k,\ell}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=\rho_\ell} \frac{j_{n/2+m-1}(r\zeta)(\zeta^q\theta_k(\zeta)-t^q\theta_k(t))}{\zeta^q\theta_k(\zeta)\,(\zeta-t)}\, d\zeta \qquad t\in\mathbb{C}$$

$$= -\frac{t^q\theta_k(t)}{2i\pi} \int_{|\zeta|=\rho_\ell} \frac{j_{n/2+m-1}(r\zeta)}{\zeta^q\theta_k(\zeta)(\zeta-t)} \qquad (|t| > \rho_\ell)$$

qui interpolent $j_{n/2+m-1}(rt)$ sur les zéros de $t^q\theta(t)$ et dont on montre qu'elles forment une suite convergente dans $(\mathcal{E}'(\mathbb{R}))^\wedge_o$ vers $j_{n/2+m-1}(rt)$.

Le théorème des résidus donne alors μ_ℓ et ν_ℓ sous la forme :

$$\tilde{\mu}_\ell\ (t) = t^q j_{n/2}(r_2t)g_{3,\ell}(t)+t^q j_{n/2+m-1}\ (\varepsilon_k(r_1+r_2)t)g_{2,\ell}(t)$$

$$\tilde{\gamma}_\ell\ (t) = t^q j_{n/2+m-1}\ (\varepsilon_k(r_1+r_2)t)g_{1,\ell}(t)+P(t)\ j_{n/2}(r_1t))\, j_{n/2+m-1}\ ((r_1+r_2)\varepsilon_k t)$$

où

$$g_{1,\ell}(t) = \sum_{\substack{|\alpha|<\rho_\ell \\ j_{n/2}(r_1\alpha)=0}} \frac{j_{n/2+m-1}(r\alpha)}{\alpha^q j_{n/2}(r_2\alpha) j_{n/2+m-1}(\varepsilon_k(r_1+r_2)\alpha)} \quad \frac{j_{n/2}(r_1t)}{r_1 j'_{n/2}(r_1\alpha)(t-\alpha)}$$

et $g_{2,\ell}$ et $g_{3,\ell}$ ont des expressions analogues et

$$P(t) = \underset{\zeta=0}{\text{Rés}}\ [\, j_{n/2+m-1}(t)\ \frac{t^{q-1}+\zeta t^{q-2}+...+\zeta^{q-1}}{\zeta^q\theta_k(\zeta)}\,] .$$

Finalement, on peut exprimer successivement μ_ℓ et γ_ℓ en inversant par Fourier et l'opérateur de transmutation, on obtient :

$$U_\ell = \frac{(-1)^m r^m}{r_1^{n}(2\pi)^{n/2}\Gamma(n/2)}\ H_m\,[\frac{\partial}{\partial x}]\ \mu_\ell\,(|x|)$$

$$V_\ell\ =\ \frac{(-1)^m r^m}{r_2^{n}(2\pi)^{n/2}\Gamma(n/2)}\ H_m\,[\frac{\partial}{\partial x}]\ \nu_\ell\,(|x|).$$

Dans le cas particulièrement intéressant de $n = 2$ (puisqu'il traite du domaine de l'image) la suite des approximations des coefficients de Fourier :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,(re^{i\theta})\ e^{\pm im\theta}\, d\theta \qquad m\geq 1 \quad r\in[R_{k-1}, R_k[$$

peut être écrite :

$$(<U_{r,m,\ell}\, ,\, \mu_{r_1} * f> + <V_{r,m,\ell}\, ,\, \mu_{r_2} * f>)_{\ell\in\mathbb{N}}$$

avec

$$U_{r,m,\ell} = \frac{(-1)^m r^m}{2\pi r_1^2}\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y}\right)^m \mu_\ell$$

$$V_{r,m,\ell} = \frac{(-1)^m r^m}{2\pi r_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y}\right)^m \nu_\ell$$

(on note $\beta_k = \varepsilon_k(r_1+r_2)$)

$$\mu_\ell = -\Delta^3 \Big[\frac{\mu_{r_2}}{\pi r_2^2} * \sum_{\substack{0<\alpha<\rho_\ell \\ j_m(\beta_k\alpha)=0}} \frac{j_m(r\alpha)}{\alpha^5 \beta_k j_1(r_1\alpha) j_1(r_2\alpha) j'_m(\beta_k\alpha)} \mu_{m,\alpha,\beta_k}$$

$$+ \frac{1}{2^{m-1}(m-1)!\pi} \frac{(B_k^2 - |.|^2)^{m-1}}{\beta_k^{2m}} \chi_{B(0,\beta_k)} *$$

$$\sum_{\substack{0<\alpha<\rho_\ell \\ j_1(r_2\alpha)=0}} \frac{j_m(r\alpha)}{\alpha^5 r_2 j_1(r_1\alpha) j_m(\beta_k\alpha) j'_1(r_2\alpha)} \mu_{1,\alpha,r_2} \Big]$$

$$\nu_\ell = -\Delta^3 \Big[\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!\pi} \frac{(\beta_k^2 - |.|^2)^{m-1}}{\beta_k^{2m}} \chi_{B(0,\beta_k)}$$

$$\sum_{\substack{0<\alpha<\rho_\ell \\ j_1(r_1\alpha)=0}} \frac{j_m(r\alpha)}{\alpha^5 r_1 j_1(r_2\alpha) j_m(\beta_k\alpha) j'_1(r_1\alpha)} \mu_{1,\alpha,r_1} \Big]$$

$$+ [S_k - T_k\Delta + U_k\Delta^2] \Big[\frac{\mu_{r_1}}{\pi r_1^2} * \frac{(\beta_k^2 - |.|^2)^{m-1}}{2^{m-1}(m-1)!\beta_k^{2m}} \chi_{B(0,\beta_k)} \Big]$$

où

$$S_k + T_k z^2 + U_k z^4 = \operatorname*{R\acute{e}s}_{\zeta=0} \Big[j_m(r\zeta) \frac{z^5+\zeta z^4+\ldots+\zeta^5}{\zeta^6 j_1(r_1\zeta) j_1(r_2\zeta) j_m(\beta_k\zeta)} \Big]$$

et

$$\mu_{m,\alpha,\rho}(r) = -\frac{1}{2^m\pi^2} \chi_{[0,\rho]}(r) \int_r^\rho (\tau^2-r^2)^{-1/2} \Big[\int_{\tau/\rho}^1 (1-\xi^2)^{m-1/2} \cos(\alpha(\tau-\rho\xi))\, d\xi \Big] d\tau .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.A. BERENSTEIN, R. GAY, *A local version of the two circles theorem.* Israël, J. Math. 55 (1986) 267-288.

[2] C.A. BERENSTEIN, R. GAY, *Le problème de Pompéiu local.* J. Anal. Math. 52 (1989).

[3] C.A. BERENSTEIN, R. GAY, A. YGER, *Inversion of the local Pompeiu transform.* (Soumis pour publication).

[4] C.A. BERENSTEIN, P. YANG, *An inverse Neumann problem.* J. Reine Angew Math. (1987) 1-21.

[5] C.A. BERENSTEIN, A. YGER, *Le problème de la déconvolution.* Journal of Functional Analysis, vol.54, n° 2, (1983).

[6] L. BROWN, B.M. SCHREIBER, B.A. TAYLOR, *Spectral synthesis and the Pompeiu problem.* Ann. Inst. Fourier 23 (1973), 125-154.

[7] S.A. WILLIAMS, *Analyticity of the boundary for Lipschitz domain without the Pompeiu property.* Indiana Univ. Math. Journ., vol.30, n° 3, (1981).

[8] L. ZALCMAN, *Analyticity and the Pompeiu problem.* Arch. Rat. Mech. Anal. 47 (1972), 237-254.

U.F.R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université Bordeaux I
351, Cours de la Libération
33405 Talence Cédex