

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ANDRÉ UNTERBERGER

Opérateurs pseudo-différentiels et analyse harmonique non commutative

Journées Équations aux dérivées partielles (1989), p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1989____A12_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Opérateurs pseudo-différentiels
et analyse harmonique non commutative

André Unterberger, Université de Reims

Certains domaines de \mathbb{R}^n sont munis d'une géométrie propre, très riche, non héritée de leur plongement dans \mathbb{R}^n : il est possible de développer sur de tels domaines une analyse tenant compte à la fois de leur géométrie intrinsèque et de leurs aspects géométriques euclidiens. L'outil essentiel, et plus adaptable qu'on ne le croit généralement, est la transformation de Laplace : les états cohérents utilisés en physique mathématique sont une version déguisée, ou généralisée, de cette transformation.

I - CONES CONVEXES ; ETATS COHERENTS.

Soit C un cône ouvert strictement convexe de \mathbb{R}^n muni d'une mesure positive $dm(t)$ et d'un groupe transitif G de transformations linéaires laissant dm invariante : on définit la fonction $r > 0$ sur C par l'équation

$$(1.1) \quad dm(t) = (r(t))^{-n/2} dt$$

dans laquelle dt désigne la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n . Les exemples principaux sont les suivants : 1) $C = \mathbb{R}_*^+$, $dm(t) = t^{-1}dt$, G se réduisant au groupe des homothéties de C ; 2) C est le cône de lumière solide défini dans \mathbb{R}^{n+1} par $x_0 > 0$ et $r(x) > 0$ avec $r(x) = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$: G est ici le produit direct du groupe de Lorentz propre (i.e. connexe) par le groupe des homothéties de rapport > 0 ; 3) avec $n = \frac{v(v+1)}{2}$, C est le cône constitué des matrices $A \in GL(v, \mathbb{R})$ telles que $A = A' > 0$: ici $r(A) = (\det A)^{2/v}$ et G est l'ensemble des applications $A \mapsto B'A B$ avec $B \in GL(v, \mathbb{R})$; 4) même idée, avec $A \in GL(v, \mathbb{C})$ et $A = A^* > 0$.

Le cas de \mathbb{R}^n opérant sur lui-même par translations ne rentre pas, bien entendu, dans le cadre axiomatique ci-haut (il aurait fallu payer de quelques complications la considération d'un groupe de transformations affines) mais on étendra très facilement au cas de \mathbb{R}^n les concepts qui suivent. On peut par ailleurs prendre des produits et considérer en particulier le demi-espace, modèle local des variétés à bord. Enfin, la liste ci-haut n'est pas complète même si on se limite aux modèles irréductibles : le livre d'Helgason [4] contient la liste des domaines d'E. Cartan et des domaines exceptionnels possibles.

Pour simplifier les notations, on supposera que C coïncide avec son dual \hat{C} , ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\langle x, t \rangle > 0$ pour tout $t \in C$, et que si M appartient à G il en est de même pour M' . Pour tout λ réel, on désigne par H_λ l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions u mesurables sur C telles que

$$(1.2) \quad \|u\|_\lambda^2 = \int_C (r(t))^{-\lambda/2} |u(t)|^2 dt < \infty.$$

L'espace de Hilbert de référence H est l'espace de Hilbert H_n des fonctions de carré sommable relativement à la mesure invariante dm : on fait opérer sur H un produit semi-direct de G et du groupe additif de \mathbb{R}^n en posant

$$(1.3) \quad (U(M, b)u)(t) = u(M^{-1}t) e^{2i\pi \langle t, b \rangle},$$

ce qui fournit une représentation unitaire irréductible.

Enfin on introduit le tube complexe $\Pi = C + i\mathbb{R}^n$ constitué des points $X = x + i\xi$ tels que x appartienne à C . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $X \in \Pi$ on introduit l'état cohérent ψ_X^λ , fonction sur C définie par

$$(1.4) \quad \psi_X^\lambda(t) = (r(x)r(t))^{\frac{\lambda+n}{4}} e^{-2\pi \langle t, X \rangle}.$$

On supposera que pour $\lambda > \lambda_0$ bien choisi on a

$$(1.5) \quad \int_C (r(x))^{\frac{\lambda-n}{2}} e^{-4\pi \langle t, x \rangle} dx < \infty,$$

condition indépendante de $t \in \mathbb{C}$ vu la relation $r(Mt) = (\det M)^{2/n} r(t)$: cette condition est assurée dans tous les cas indiqués plus haut avec $\lambda_0 = 0$ dans le cas de la demi-droite, $\lambda_0 = n-1$ dans le cas du cône de lumière en $(n+1)$ variables et $\lambda_0 = \frac{v(v-1)}{2}$ dans celui du cône des matrices > 0 à v lignes et v colonnes. Les deux propriétés principales de la famille (ψ_X^λ) lorsque X parcourt Π sont les suivantes, une fois que l'on a noté l'appartenance de ψ_X^λ à H pour $\lambda > \lambda_0 - n$:

$$(1.6) \quad U(M, b) \psi_X^\lambda = \psi_{M^{-1}X - ib}^\lambda$$

et, pour $\lambda > \lambda_0$ et $u \in H$,

$$(1.7) \quad \int_{\Pi} |(u, \psi_X^\lambda)|^2 d\mu(X) = \alpha_\lambda \|u\|^2.$$

Dans cette dernière formule, la norme et le produit scalaire non affectés d'indices sont ceux dans $H = H_n$, $d\mu(X) = (r(x))^{-n} dx d\xi$ est la mesure sur Π invariante par l'action de $G \times \mathbb{R}^n$ sur Π qui intervient au second membre de (1.6) et α_λ est une constante finie: la formule (1.7) s'appelle une résolution de l'identité au moyen de la famille d'états cohérents (ψ_X^λ) , ce que l'on comprendra aussitôt en la polarisant.

Si l'on se sert de l'isométrie de H sur H_λ qui consiste à multiplier par $(r(t))^{\frac{\lambda-n}{4}}$, on peut aussi écrire (1.7) sous la forme

$$(1.8) \quad \|u\|_\lambda^2 = \beta_\lambda \int (r(x))^{\frac{\lambda-n}{2}} |\bar{f}(X)|^2 dx d\xi$$

avec

$$(1.9) \quad \bar{f}(X) = \int_{\mathbb{C}} u(t) e^{-2\pi \langle t, \bar{X} \rangle} dt.$$

Il est bien entendu, dans (1.8), que $u \in H_\lambda$ et que β_λ est une constante: \bar{f} n'est autre que la transformée de Laplace de u , c'est une fonction antiholomorphe de $X \in \Pi$. Du reste, une forme du théorème de Paley-Wiener exprime que, pour $\lambda > \lambda_0$, l'application $u \mapsto \bar{f}$ est une isométrie de H_λ sur un espace de fonctions antiholomorphes sur Π , de carré sommable relativement au poids qui intervient au second membre de (1.8).

Une conséquence immédiate de la notion d'état cohérent est la famille suivante d'inégalités de Carleman, dans laquelle $\delta(x)$ désigne la distance euclidienne de $x \in C$ au bord de C : on suppose, et c'est le cas pour tous les modèles cités, que l'on a pour une certaine constante $C > 0$ (personne ne la confondra avec le cône C) l'inégalité

$$C^{-1}r(x) \leq r(y) \leq C r(x)$$

pour tout couple (x, y) de points de C tels que $|x-y| \leq \frac{\delta(x)}{2}$.

Théorème 1.1. Posons, pour tout $\lambda > \lambda_0$ et tout entier $k \geq 0$,

$$I_{\lambda, k}(t) = \int_C (r(x))^{\frac{\lambda-n}{2}} (\delta(x))^{2k} e^{-4\pi \langle t, x \rangle} dx.$$

Alors, pour toute fonction $u \in C_0^\infty(C)$ et tout opérateur différentiel linéaire à coefficients constants $P(D)$ sur \mathbb{R}^n , on a l'inégalité

$$\begin{aligned} \int (r(t))^{-\lambda/2} |P(D)u(t)|^2 dt \\ \geq C^{-1} \sum_{\alpha} \int I_{\lambda, |\alpha|}(t) |P^{(\alpha)}(D)u(t)|^2 dt \end{aligned}$$

dans laquelle la constante C ne dépend que du cône C envisagé et du degré de P .

Preuve. On écrit l'intégrale de gauche sous la forme

$$\|P(D)u\|_{\lambda}^2 = \beta_{\lambda} \int (r(x))^{\frac{\lambda-n}{2}} |\bar{P}(iX)|^2 |\bar{f}(X)|^2 dx \, d\xi$$

et comme le rapport $(\frac{r(x)}{r(y)})^{+1}$ reste uniformément borné lorsque

$|x-y| \leq \frac{\delta(x)}{4}$, on peut sans guère augmenter l'intégrale y remplacer la fonction $|\bar{P}(iX)|^2 |\bar{f}(X)|^2$ par sa valeur moyenne sur la boule de \mathbb{C}^n définie par $|X-Y| \leq \frac{\delta(x)}{4}$. Le théorème résulte alors de l'inégalité

$$(1.10) \quad \varepsilon^{2|\alpha|} |P^{(\alpha)}(0)|^2 |f(0)|^2 \leq C \varepsilon^{-2n} \int_{|Y_1| \leq \varepsilon, \dots} |P(Y)|^2 |f(Y)|^2 dy \, d\eta$$

valable pour toute fonction f holomorphe au voisinage du polydisque qui intervient à droite et tout polynôme P : la preuve de cette inégalité (dans laquelle C ne dépend que de n et du degré de P) est du

reste triviale puisqu'on se ramène par changement d'échelle au cas où $\varepsilon = 1$, puis à celui où $n = 1$, enfin au cas où P est de degré 1. Dans le cas de la demi-droite, on a $\delta(x) = x$, $r(t) = t^2$, et $I_{\lambda,k}(t) = \gamma t^{-\lambda-2k}$ où γ est une constante, de sorte que le théorème redonne les inégalités de Hardy un peu généralisées ; dans le cas du cône de lumière, on a $\delta(x) \sim x_0^{-1} r(x)$ et, ainsi que le montre un calcul un peu fastidieux, $I_{\lambda,k}(t) \sim t_0^{-2k} (r(t))^{-\lambda/2}$, ce qui conduit à des inégalités peut-être nouvelles.

Sur \mathbb{R}^n , l'importance des inégalités de Carleman dans les équations aux dérivées partielles a été reconnue très tôt par Calderon [3], Hörmander ([5], chap.8), Schwartz, Trèves [10]. Etant donné $\lambda > 0$, on introduit le système de coordonnées complexes $X_j = \lambda^{1/2} x_j + i \lambda^{-1/2} \xi_j$ et la norme

$$(1.11) \quad \|u\|_{\lambda}^2 = \int e^{2\pi\lambda|t|^2} |u(t)|^2 dt$$

qui s'écrit aussi

$$(1.12) \quad \|u\|_{\lambda}^2 = \int e^{-\pi(\lambda|x|^2 + \lambda^{-1}|\xi|^2)} |\bar{f}(X)|^2 dx d\xi$$

si l'on pose

$$(1.13) \quad \bar{f}(X) = (2\lambda)^{n/4} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \sum \bar{X}_j^2\right) \int u(t) e^{2\pi\lambda^{1/2} \langle t, \bar{X} \rangle} dt :$$

cette transformée de Laplace un peu modifiée s'appelle ici la transformée de Bargmann-Fock (cf. Igusa [7]) et (1.10) conduit tout aussi immédiatement à l'inégalité [10]

$$(1.14) \quad \int e^{2\pi\lambda|t|^2} |P(D)u|^2 dt \geq C^{-1} \sum \lambda^{|\alpha|} \int e^{2\pi\lambda|t|^2} |P^{(\alpha)}(D)u|^2 dt.$$

II - CALCULS DE FUCHS.

Le problème évoqué ici est celui de la construction d'une analyse pseudo-différentielle exactement adaptée à la géométrie d'un domaine C de \mathbb{R}^n . Prenons par exemple le cas de la demi-droite : il est habituel de procéder en étendant simplement à ce cas la définition usuelle du calcul standard des opérateurs pseudo-différentiels, c'est-à-dire en posant

$$(2.1) \quad (Op(f)u)(s) = \int f(s, \eta) u(t) e^{2i\pi\eta(s-t)} dt d\eta ,$$

le symbole f étant défini sur le demi-plan $s > 0$. Cependant, si l'on appelle $\mathcal{F}_2^{-1}f$ la transformée de Fourier inverse de f relativement à η , on voit que la restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ de l'opérateur ne dépend en fait que de la restriction de $(\mathcal{F}_2^{-1}f)(s, z)$ à l'ensemble défini par $z < s$: l'hypothèse que le support de cette distribution est contenu dans l'ensemble défini par $z \leq s$ est l'hypothèse de lacunarité introduite par Melrose dans son calcul des opérateurs totalement caractéristiques [9] : bien entendu, ce n'est que pour simplifier les notations que nous considérons ici la demi-droite plutôt que le demi-espace, sur lequel tout ce qui va suivre s'étend si l'on utilise dans les variables tangentielles le calcul de Weyl.

Nous remplacerons le calcul (2.1) par le suivant :

$$(2.2) \quad [(s^{-\frac{1}{2}}) \text{Op}_F(f) (s^{\frac{1}{2}}u)](s) \\ = \int f((st)^{\frac{1}{2}}, \eta) u(t) e^{2i\pi\eta(s-t)} dt d\eta$$

dans lequel le problème précédent ne se pose plus puisque l'application $(s, t) \mapsto ((st)^{\frac{1}{2}}, s-t)$ est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$: le fait d'avoir conjugué la définition par l'opérateur de multiplication par $s^{\frac{1}{2}}$ est sans importance et ne répond qu'au souci de considérer $H = L^2(\mathbb{R}_*^+, s^{-1}ds)$ comme espace de Hilbert de référence. Plus généralement, soit C un ouvert de \mathbb{R}^n muni par ailleurs d'une structure riemannienne qui en fasse un espace symétrique : ceci permet de définir le milieu $\text{mil}(s, t)$ de deux points ou, si l'on préfère, la symétrie géodésique S_y autour de tout point y de C . Faisons l'hypothèse, vérifiée dans tous les cas cités au début de cet exposé, que l'application $(s, t) \mapsto (\text{mil}(s, t), s-t)$ est un difféomorphisme global de $C \times C$ sur $C \times \mathbb{R}^n$. On peut alors définir le calcul de Fuchs du domaine C par la formule

$$(2.3) \quad (\text{Op}_F(f)u)(t) = 2^n \int_{C \times \mathbb{R}^n} f(y, \eta) u(S_y t) e^{2i\pi \langle \eta, t - S_y t \rangle} dy d\eta.$$

La première chose à faire est de construire au moyen de ce calcul des algèbres d'opérateurs bornés sur $H = L^2(C, dm(t))$, en analogie avec celles associées, sur \mathbb{R}^n , aux classes de symboles $S_{0,0}^0$ ou bien

$S_{1,0}^0 = S_{0,0}^0 \cap S_{1,1}^0$: il est commode d'appeler classes de symboles de type uniforme (resp. classique) celles qui généralisent les premières ou les secondes ; la terminologie se comprendra si l'on examine, dans le cas de \mathbb{R}^n , l'effet sur un symbole de la classe $S_{0,0}^0$ d'une translation par un vecteur appartenant à \mathbb{R}^{2n} .

Dans le cas de la demi-droite, l'utilisation de la représentation unitaire U définie en (1.3) conduit à la formule de covariance

$$(2.4) \quad U(a,b) \text{Op}_F(f) U(a,b)^{-1} = \text{Op}_F(f(a^{-1}y, a(\eta-b)))$$

dans laquelle les couples (a,b) décrivent le groupe affine : les opérateurs différentiels

$$(2.5) \quad e_1 = y \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_1 = y^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

commutent à l'action du groupe affine sur le demi-plan $\{(y,\eta) : y > 0\}$, d'où la définition

Définition 2.1. Un symbole de type uniforme de poids 1 est une fonction f de classe C^∞ sur le demi-plan telle que, pour tout couple (j,k) d'entiers ≥ 0 , la fonction

$$(y \frac{\partial}{\partial y})^j (y^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta})^k f(y,\eta)$$

soit bornée.

Bien entendu, on peut définir des symboles de type uniforme de poids beaucoup plus général [11]. Le tube complexe Π dont il a été question plus haut dans un cadre général se réduit ici au demi-plan de Poincaré $\{x+i\xi : x > 0\}$ sur lequel la distance intrinsèque est donnée par la formule classique

$$(2.6) \quad \text{ch } d(X,X') = \frac{x^2 + x'^2 + (\xi - \xi')^2}{2xx'}$$

L'utilisation des états cohérents ψ_X^λ définis en (1.4) conduit, au prix d'un travail déjà important même s'il ne s'agit ici que de la demi-droite, à la caractérisation suivante :

Théorème 2.2. Il y a identité entre la classe des opérateurs de la forme $\text{Op}_F(f)$, où f est un symbole de type uniforme de poids 1, et celle des opérateurs A bornés sur H qui vérifient la propriété suivante : pour tout $N > 0$, il existe $\lambda_1 > 0$ et, pour tout $\lambda > \lambda_1$, une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$|(A\psi_X^\lambda, \psi_{X'}^\lambda)| \leq C e^{-Nd(X, X')}$$

pour tout couple (X, X') de points de Π .

Il résulte immédiatement de ce théorème que les opérateurs en question constituent une algèbre. Dans le cas où C est le cône de lumière, ce théorème s'étend exactement, mais la preuve en est d'une longueur considérable [12]. Nous conjecturons qu'il reste valable, avec la notion convenable de symbole de type uniforme, toutes les fois que le tube complexe Π peut être muni lui-même d'un ds^2 se réduisant sur C à celui déjà connu et qui fasse de C un espace hermitien symétrique : c'est bien le cas pour les modèles cités.

On passe de la notion de symbole de type uniforme à celle de symbole de type classique en remplaçant comme à l'accoutumée l'hypothèse qu'il est inoffensif de dériver par celle que c'est avantageux.

Définition 2.3. Soient m et μ deux nombres réels. Nous dirons que $f \in \Sigma^{m, \mu}$ si f est une fonction de classe C^∞ sur le demi-plan vérifiant les estimations

$$|(y \frac{\partial}{\partial y})^j (y^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta})^k f(y, \eta)| \leq C_{jk} y^\mu (1+y^2 \mu^2)^{\frac{m-k}{2}}.$$

Nous dirons aussi que f , ou l'opérateur associé $\text{Op}_F(f)$, est de type classique d'ordre (m, μ) .

Si l'on pose

$$(2.7) \quad f(y, \eta) = a(y, y\eta),$$

la condition s'écrit aussi

$$(2.8) \quad |(y \frac{\partial}{\partial y})^j (\frac{\partial}{\partial \xi})^k a(y, \zeta)| \leq C_{jk} y^\mu (1+|\zeta|)^{m-k} :$$

on voit que, lorsque $\mu = 0$, la classe englobe celle des symboles totalement caractéristiques, dont la définition est plus exigeante aussi bien lorsque $y \rightarrow 0$ que lorsque $y \rightarrow \infty$. Dans ce dernier cas, on parvient aux mêmes classes d'opérateurs, que l'on utilise la formule (2.2) ou la formule (2.1), à condition de faire dans le deuxième cas une hypothèse supplémentaire de lacunarité. Les symboles de type classique permettent encore de constituer des algèbres, mais surtout autorisent des développements asymptotiques [11].

Dans le cas du cône de lumière, il est commode de transformer au moyen du difféomorphisme $t \mapsto x = (x_0, x_*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, avec

$$(2.9) \quad t_0 = x_0(1 + |x_*|^2), \quad t_k = 2x_0 x_k,$$

le cône C en le demi-cylindre $x_0 > 0, |x_*| < 1$: le ds^2 est en effet plus simple dans les nouvelles coordonnées et la classe des symboles classiques d'ordre (m, μ, ν) est, avec

$$(2.10) \quad f(x, \xi) = a(x_0, x_*; x_0 \xi_0, (1 - |x_*|^2) \xi_*),$$

caractérisée par les inégalités

$$(2.11) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x_*} \right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi_0} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial \xi_*} \right)^\beta a(x, \xi) \right| \\ \leq C x_0^{\mu-j} (1 - |x_*|^2)^{\nu-|\alpha|} (1 + |\xi|)^{m-k-|\beta|}.$$

En particulier, les opérateurs différentiels totalement caractéristiques sont engendrés par les opérateurs $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$, $(1 - |x_*|^2) \frac{\partial}{\partial x_j}$: on pourra consulter [12] pour les détails.

Revenons une dernière fois au cas de la demi-droite. Les opérateurs infinitésimaux de la représentation U qui intervient ici sont l'opérateur (t) de multiplication par t et l'opérateur $(2i\pi)^{-1} t \frac{d}{dt}$. Définissons, pour m entier ≥ 0 et μ réel, l'appartenance de u à l'espace $H^{m, \mu}$ par les conditions que $t^\mu (t \frac{d}{dt})^j u$ appartienne à $H = L^2(\mathbb{R}_*^+, t^{-1} dt)$ pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq m$; étendons par dualité la définition au cas où m est entier négatif. On peut alors obtenir une caractérisation "à la Beals" (cf [1]) des opérateurs de type classique :

Théorème 2.4. Pour qu'un opérateur A borné sur H soit de type classique d'ordre (0,0), il faut et il suffit que, pour tout couple (j',k) d'entiers ≥ 0 , l'opérateur

$$(\text{ad}(t))^j (\text{ad}(\frac{1}{2i\pi} t \frac{d}{dt}))^{k_A}$$

s'étende en un opérateur borné de $H^{-j,j}$ dans H.

On tire de là la conséquence, d'un style habituel, relative à l'inverse d'un opérateur de type classique inversible simultanément dans tous les espaces $H^{-j,j}$ et surtout le fait que l'on reste dans la classe si l'on transforme un opérateur de ce type par un difféomorphisme φ , pourvu que φ vérifie les estimations $|(t \frac{d}{dt})^N \varphi(t)| \leq C_N t$ et qu'il en soit de même de son inverse φ^{-1} . Comme $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n$ est le demi-espace, modèle local des variétés à bord, on voit que la théorie permet d'obtenir sur ces dernières un calcul pseudo-différentiel, par les procédés barbares de découpage et de recollement nécessités, dans le cas général, par l'absence de symétries.

III LA CLASSE $S_{1,1}$.

Nous avons vu dans les deux premières sections l'intérêt des états cohérents liés à la transformation de Laplace, qui permettent de représenter des fonctions de variables réelles à l'aide de fonctions holomorphes. On peut bien entendu concevoir qu'il puisse être utile de remplacer les équations de Cauchy-Riemann par d'autres systèmes elliptiques : en voici un exemple, lié à l'opérateur de Klein-Gordon modifié obtenu en remplaçant t par it dans l'opérateur de Klein-Gordon.

L'espace complexe Π considéré jusqu'à présent doit maintenant être remplacé par l'espace symétrique réel de rang un Π_0 constitué des points $Y = (\varepsilon, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\varepsilon > 0$: il est muni de la métrique $ds^2 = \varepsilon^{-2}(d\varepsilon^2 + |dy|^2)$, ce qui conduit à la formule classique (voir par exemple Lax-Phillips [8])

$$(3.1) \quad \text{ch } d(Y, Y') = (2\varepsilon\varepsilon')^{-1}(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + |y - y'|^2),$$

et de la mesure associée $d\mu(Y) = \varepsilon^{-n-1} d\varepsilon dy$. Son interprétation

"physique" est ici celle d'un espace-temps de Minkowski dans lequel on aurait remplacé t par it , ce qui transforme l'équation de Klein-Gordon en une équation elliptique.

On s'intéresse ici à des fonctions ou distributions tempérées sur \mathbb{R}^n et, comme dans la section 1, à une chaîne d'espaces de Hilbert H_λ : ce ne sont autres, à présent, que les espaces de Sobolev habituellement désignés ainsi, et l'espace H sera simplement $H_0 = L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on pose $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ et l'on définit, pour tout entier λ , la fonction $\psi_\epsilon^\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par sa transformée de Fourier

$$(3.2) \quad \hat{\psi}_\epsilon^\lambda(\xi) = \epsilon^{\frac{n}{2} + \lambda} \langle \xi \rangle^{-\lambda} e^{-2\pi\epsilon\langle \xi \rangle} ;$$

Plus généralement, on pose, si $Y = (\epsilon, y) \in \Pi_0$,

$$(3.3) \quad \psi_{\epsilon, y}^\lambda(x) = \psi_\epsilon^\lambda(x - y) :$$

ce sont les états cohérents cherchés. En dehors de l'action évidente des translations, il n'y a pas de formule analogue à (1.6) permutant les états cohérents entre eux sous l'effet des opérateurs d'une représentation de groupe. On a cependant la formule de résolution de l'identité

$$(3.4) \quad \int_{\Pi_0} |(u, \psi_Y^\lambda)|^2 d\mu(Y) = \alpha_\lambda \|u\|^2$$

valable avec une constante finie si $\lambda \geq 1$. Cette formule est analogue à (1.7) mais on peut aussi l'écrire sous la forme (analogue à (1.8))

$$(3.5) \quad \alpha_\lambda \|u\|_{-\lambda}^2 = \int_{\Pi_0} \epsilon^{2\lambda+n} |f(Y)|^2 d\mu(Y)$$

si l'on pose

$$(3.6) \quad f(Y) = \int \hat{u}(\xi) e^{-2\pi\epsilon\langle \xi \rangle} e^{2i\pi\langle y, \xi \rangle} d\xi .$$

On observera que la fonction f vérifie l'équation de Klein-Gordon modifiée

$$(3.7) \quad 4\pi^2 f = \left[\frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} + \sum \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right] f .$$

Au contraire de la transformation de Bargmann-Fock des fonctions sur \mathbb{R}^n , bien adaptée à la caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels de la classe $S_{0,0}$ (cf [12], section 1), la transformation $u \mapsto f$ que l'on vient de définir est bien adaptée aux opérateurs de la classe $S_{1,1}$. Rappelons que, à la suite de travaux plus anciens de Stein, Bourdaud [2] a montré comment on pouvait obtenir une algèbre d'opérateurs en supposant simultanément l'appartenance à $S_{1,1}^0$ des symboles standard d'un opérateur et de son adjoint ; on pourra consulter également Hörmander [6] .

Plus généralement, appelons poids toute fonction $m = m(x, \xi)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, radiale par rapport à la deuxième variable, et telle que la fonction \tilde{m} définie sur Π_0 par la relation $m(x, \xi) = \tilde{m}(\langle \xi \rangle^{-1}, x)$ vérifie pour un couple (C_1, N_1) de constantes positives l'inégalité

$$(3.8) \quad \tilde{m}(Y) \leq C_1 \tilde{m}(Y') e^{N_1 d(Y, Y')}$$

pour tout couple (Y, Y') de points de Π_0 . On dira qu'un symbole $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ appartient à $S_{1,1}(m)$ s'il vérifie les estimations

$$|(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \xi})^\beta f(x, \xi)| \leq C \langle \xi \rangle^{|\alpha| - |\beta|} m(x, \xi)$$

avec des constantes C ne dépendant que de (α, β) .

Théorème 3.1. Soit A un opérateur linéaire continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et soit m un poids. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) les symboles standard de A et de A^* appartiennent tous deux à $S_{1,1}(m)$
- (ii) pour tout entier N il existe $\lambda_1 > 0$ et, pour tout entier $\lambda \geq \lambda_1$, une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$|(A\psi_Y^\lambda, \psi_{Y'}^\lambda)| \leq C \tilde{m}(Y) e^{-N d(Y, Y')}$$

pour tout couple (Y, Y') de points de Π_0 .

Il n'est pas facile de construire suffisamment d'opérateurs vérifiant les conditions du théorème 3.1 à cause des exigences por-

tant sur deux symboles liés (à la conjugaison près) par le fait que l'un est l'image de l'autre par l'opérateur

$$\exp[(2i\pi)^{-1} \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j}] .$$

Dans le cas où $n = 1$, le calcul de Klein-Gordon (voir [14]) conduit à un opérateur $Op_{KG}(f)$ vérifiant ces conditions pourvu que le seul symbole (de Klein-Gordon) f appartienne à $S_{1,1}(m)$.

REFERENCES.

- [1] BEALS, R. Characterization of pseudodifferential operators, Duke Math. J. 42 (1977), 45-57
- [2] BOURDAUD, G. Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels, Comm. Part. Diff. Equ. 13,9(1988), 1059-1084
- [3] CALDERON, A.P. Uniqueness in the Cauchy problem of partial differential equations, Amer. J. Math. 80 (1958), 16-36
- [4] HELGASON, S. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press (1978), New York-London
- [5] HORMANDER, L. Linear partial differential operators, Springer-Verlag (1963), Berlin
- [6] HORMANDER, L. Pseudodifferential operators of type 1,1, Comm. Part. Diff. Equ. 13,9 (1988), 1085-1112
- [7] IGUSA, J. Theta Functions, Springer-Verlag (1972), Berlin
- [8] LAX, P.D., PHILLIPS, R.S. Translation representations for the solutions of the non-euclidean wave equation, Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 617-667
- [9] MELROSE, R.B. Transformation of boundary problems, Acta Math. 147 (1981), 149-236
- [10] TREVES, F. Relations de domination entre opérateurs différentiels, Acta Math. 101 (1959), 1-139
- [11] UNTERBERGER, A. The calculus of pseudodifferential operators of Fuchs type, Comm. Part. Diff. Equ. 9,12(1984), 1179-1236

- [12] UNTERBERGER, A. Analyse harmonique et analyse pseudo-différentielle du cône de lumière, Astérisque 156, S.M.F. (1987), Paris
- [13] UNTERBERGER, A. Pseudodifferential analysis, quantum mechanics and relativity, Comm. Part. Diff. Equ. 13,7 (1988), 847-894
- [14] UNTERBERGER, A. L'analyse de Klein-Gordon, Comptes Rendus Acad. Sci., t. 308, série I (1989), 397-399.

Département de Mathématiques
Université de Reims
Moulin de la Housse
BP 347
F 51062 Reims Cedex