Journées Équations aux dérivées partielles

Christian Gérard
André Martinez

Asymptotique semi-classique de la fonction spectrale pour des opérateurs de Schrödinger à longue portée

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A5_0>

ASYMPTOTIQUE SEMI-CLASSIQUE DE LA FONCTION SPECTRALE POUR DES OPERATEURS DE SCHRODINGER A LONGUE PORTEE.

par

C.Gérard et A.Martinez

Université de Paris-Sud

Département de Mathématiques

Bâtiment 425

91405 Orsay .

1.INTRODUCTION.

On s'intéresse dans ce travail à la fonction spectrale pour des opérateurs de Schrödinger semiclassiques $P = -h^2\Delta + V(x)$ sur $\mathbb{R}^n$, pour des potentiels V réguliers à longue portée, et on renvoie à [8] pour le détail des démonstrations.

Si dE_λ désigne la résolution spectrale de P, la formule de Stone et le principe d'absorption limite donnent, pour $\lambda > 0$:

$$dE_\lambda = (2i\pi)^{-1}(R(\lambda+i0,h) - R(\lambda-i0,h))d\lambda,$$

où $R(\lambda \pm i0,h)$ sont les valeurs au bord usuelles de la résolvante de P.

On voit en particulier que la présence de résonances, i.e. de pôles du prolongement méromorphe de $R(\lambda \pm i0)$, doit produire des pics en λ pour la fonction spectrale $(\partial e/\partial\lambda)(x,y;\lambda,h)$, qui est par définition le noyau distribution de $\partial E_\lambda/\partial\lambda$. Le même phénomène pour la section totale efficace de diffusion donne lieu aux résonances de forme de Breit-Wigner bien connues des physiciens.

D'autre part, dans les variables d'espace x et y, on s'attend à ce que la fonction spectrale reflète le comportement des fonctions propres généralisées et des états résonnants de P.

On commence par se placer près d'un niveau d'énergie sans trajectoires captées (et donc loin de toute résonance), et on obtient dans ce cas des développements asymptotiques (pour $h \to 0$) localement uniformes en (x,y), très voisins de ceux obtenus par Vainberg dans [2] pour les hautes énergies d'une perturbation à support compact du laplacien. Notons que les résultats de Robert et Tamura [3] donnent un développement dans $C^\infty(\mathbb{R}_\lambda{}^+, D'(\mathbb{R}^n))$ de la densité spectrale locale $(\partial e/\partial\lambda)(x,x;\lambda,h)$.

On étudie ensuite un cas avec trajectoires captées, le "puits dans une île", qui donne lieu (lorsque le potentiel est dilatable analytiquement) à des résonances de forme (cf.[1]). On obtient alors un développement qui, grosso modo, s'écrit comme la somme d'une fonction spectrale sans trajectoires captées (correspondant au potentiel obtenu en "remplissant" le puits), et d'un terme de type Breit-Wigner faisant intervenir les résonances et les états résonnants associés.

2.CAS NON-CAPTIF

Dans toute la suite, on suppose que le potentiel $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ vérifie, pour un certain $\rho>0$, l'hypothèse :

(1.1) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\exists C_\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\left|\partial^\alpha V(x)\right| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{-\rho-|\alpha|}$

où on a noté $\langle x\rangle = (1+x^2)^{1/2}$.

On fixe maintenant un niveau d'énergie $\lambda_0>0$, et on suppose dans cette section que λ_0 est non-captif, c'est à dire que si H_p désigne le champ hamiltonien associé à $p(x,\xi)=\xi^2+V(x)$:

(1.2) l'ensemble des trajectoires captées $K_0=\{(x,\xi)\in p^{-1}(\lambda_0)$ t.q. $\exp tH_p(x,\xi)\not\to\infty$ quand $|t|\to\infty\}$ est vide.

(En utilisant des arguments de [4], il est facile de voir que cette notion coïncide avec celle donnée dans [3] et [2]).

Pour λ voisin de λ_0, on pose :

$K_\lambda=\{(x,\xi,y,\eta)\in T^*\mathbb{R}^n\times T^*\mathbb{R}^n \mid p(x,\xi)=\lambda$ et $\exists t\in\mathbb{R}$, $\exp tH_p(x,\xi)=(y,\eta)\}$.

On a alors :

Théorème 1: Sous les hypothèses (1.1) et (1.2), on a :

i) Pour λ voisin de λ_0, $(\partial e/\partial\lambda)(x,y;\lambda,h)$ est une distribution lagrangienne (semi-classique) associée à la relation canonique K_λ, d'ordre 1/2.

ii) Microlocalement près de $\Delta_\lambda=\{(x,\xi;x,\xi) \mid V(x)\neq\lambda\}$, $\partial e/\partial\lambda$ s'écrit :

$$(\partial e/\partial\lambda)(x,y;\lambda,h) = (2\pi h)^{-n}\int_{S^{n-1}} e^{i\varphi(x,y,\omega,\lambda)/h}a(x,y,\omega,\lambda,h)d\omega$$

modulo un noyau dont l'ensemble de fréquence (défini dans [5]) ne rencontre pas Δ_λ. Ici φ est la solution du système eiconal :

$$(\partial\varphi/\partial x)^2+V(x)=\lambda\ ,\ (\partial\varphi/\partial x)\big|_{\langle x-y,\omega\rangle=0}=(\lambda-V(x))^{1/2}\omega\ ,\ \varphi\big|_{x=y}=0$$

et a est un symbole classique d'ordre 0, dont le terme principal a_0 vérifie :

$$a_0(x,x,\omega,\lambda) = (1/2)(\lambda-V(x))^{n/2-1}$$

iii) Le symbole principal de $\partial e/\partial\lambda$, $e_0\in C^\infty(K_\lambda,\Omega^{1/2}\otimes M)$, (où M désigne le fibré de Maslov sur K_λ), vérifie :

$$L_{H_p(x,\xi)}\, e_0= L_{H_p(y,\eta)}e_0= 0$$

où on a noté L_{H_p} la dérivée de Lie par rapport à H_p.

<u>Remarque</u> : iii) combiné avec ii) permet de déterminer e_0 sur l'ensemble

$\{(x,\xi;\exp tH_p(x,\xi)) \mid p(x,\xi)=\lambda\ ,\ V(x)-\lambda<0\ ,\ t\in\mathbb{R}\} = K_\lambda \cap \{V(x)\neq\lambda\}$.

<u>Idée de la preuve</u> : On part de la formule :

$$(1.3) \qquad \partial E/\partial\lambda = (2\pi h)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{-it(P-\lambda)/h}dt$$

où le membre de droite peut être défini comme la limite quand ε tend vers 0_+ de $\int e^{-it(P-\lambda)/h\ -\varepsilon|t|/h}dt$. Utilisant ensuite l'hypothèse de non-capture (1.2), on montre par le calcul fonctionnel de Helffer-Robert [6], et en utilisant les constructions de paramétrices sortantes de Isosaki-Kitada [7], que l'intégrale (1.3) peut en fait se ramener, modulo un opérateur dont le noyau est localement uniformément $O(h^\infty)$, à une intégrale sur un intervalle compact.Le i) se déduit alors de la théorie standard des opérateurs intégraux de Fourier.

Pour le ii), on commence par montrer que la fonction φ paramétrise bien la relation K_λ près de Δ_λ, à la suite de quoi le symbole principal a_0 se calcule par la relation $\int g(\lambda)dE_\lambda=g(P)$ où $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tronque près du niveau d'énergie λ_0.

Le iii) se déduit facilement des relations $(P-\lambda)(\partial E/\partial\lambda) =(\partial E/\partial\lambda)(P-\lambda)=0$.

#

<u>3.CAS DU PUITS DANS UNE ILE</u>

On se place toujours sous la condition (1.1), mais on suppose maintenant qu'il existe un ouvert connexe $\ddot{O}\subset\mathbb{R}^n$ (l'île), et un compact $U\subset\ddot{O}$ (le puits) tels que :

(3.1) $V\leqslant \lambda_0$ sur U ; $V > \lambda_0$ dans $\ddot{O}\backslash U$; $V< \lambda_0$ sur le complémentaire de l'adhérence de $\ddot{O}$; V est analytique près du complémentaire de $\ddot{O}$ et se prolonge holomorphiquement près de $\{ |\mathrm{Im} z| \leqslant \varepsilon_0 \langle \mathrm{Re} z \rangle \, , \, \mathrm{Re} z \in \ddot{O}^c \}$.

On introduit la distance d'Agmon d associée à la métrique $(V-\lambda_0)_+ dx^2$, et on suppose :

(3.2) Le diamètre de U pour d est nul.

Finalement, on suppose aussi :

(3.3) Il n'existe pas de trajectoire captée pour H_p au dessus de $\ddot{O}^c$ dans le niveau d'énergie λ_0.

On peut alors construire une fonction fuite $G(x,\xi)$ telle que $H_p G(x,\xi) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ pour $x \in \ddot{O}^c$ et $p(x,\xi)=\lambda_0$, et appliquer les résultats obtenus par Helffer et Sjöstrand dans cette situation (cf. [1]).

Soit $S_0>0$ la distance d'Agmon entre U et $\partial\ddot{O}$, et pour $h \in J$ (où $J \subset]0,1]$, $\mathrm{adh}(J) \supset 0$), soit $I(h)$ une famille d'intervalles compacts tels que $I(h) \to \{\lambda_0\}$ lorsque $h \to 0$. Soit aussi $b(h)>0$ une fonction non-exponentiellement petite (au sens que $b(h) \geqslant C_\varepsilon e^{-\varepsilon/h}$ pour tout $\varepsilon>0$, h assez petit, et avec $C_\varepsilon>0$). On note $\rho_1(h),\dots,\rho_m(h)$ les résonances de P qui sont dans $I(h)+i[-b(h),0]$, et on suppose qu'elles sont suffisamment éloignées les une des autres, ainsi que des autres résonances de P, au sens qu'il existe une fonction $a(h)>0$ non-exponentiellement petite telle que :

(3.4) $|\mathrm{Re}\rho_j(h) - \mathrm{Re}\rho_k(h)| \geqslant a(h)\delta_{j,k}$ pour tout couple (j,k), et P n'a pas de résonance dont la partie réelle est dans $(I(h)+[-a(h),a(h)])\backslash I(h)$.

Notons aussi $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ les états résonnants associés à $\rho_1,\dots,\rho_m$, ainsi que $\psi_1,\dots,\psi_m$ les états résonnants duaux, associés aux résonances $\bar{\rho}_1,\dots,\bar{\rho}_m$, et vérifiant $\langle \varphi_j , \psi_k \rangle = \delta_{j,k}$, où $\langle .,. \rangle$ désigne ici l'extension du produit L^2 définie dans [1] Prop.8.8.

On introduit finalement, pour $\eta>0$, l'opérateur de Schrödinger modifié $P_\eta = -h^2\Delta + V_\eta$ où $V_\eta = V+W_\eta$, $W_\eta \in C_0^\infty(\{d(x,U)< \eta\})$, $V+W_\eta > \lambda_0$ dans Ö. P_η satisfait alors à toutes les conditions du paragraphe 2, et on note $\partial e_\eta/\partial\lambda$ sa fonction spectrale.

Notre résultat est :

<u>Théorème 2</u> : <u>Sous les hypothèses (1.1),et (3.1)-(3.4), la fonction spectrale de P s'écrit, pour $\lambda \in I(h)$:</u>

$$\partial e/\partial\lambda)(x,y;\lambda,h) = (\partial e_\eta/\partial\lambda)(x,y;\lambda,h) - \pi^{-1} \operatorname{Im}[\textstyle\sum_j(\lambda-\rho_j)^{-1}\varphi_j(x)\overline{\psi}_j(y)] + K(x,y;\lambda,h)$$

<u>où K satisfait, pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$:</u>

$$\partial_x^\alpha\partial_y^\beta K(x,y;\lambda,h) = O_\eta(e^{[\varepsilon(\eta)-\min(S_0+d(x,U)+d(y,\partial Ö),S_0+d(y,U)+d(x,\partial Ö)]/h})$$

<u>(avec $\varepsilon(\eta)\to 0$ lorsque $\eta\to 0$) localement uniformément pour x,y dans $\mathbb{R}^n$, et uniformément pour $\lambda \in I(h)$, h assez petit.</u>

<u>Remarque 1</u> : L'exposant intervenant dans l'estimation de $K(x,y;\lambda,h)$ peut s'interpréter comme la distance d'Agmon minimale à parcourir pour aller de x à y en passant à la fois par le puits U et la mer $Ö^c$.

<u>Remarque 2</u> : Dans le cas particulier où U est un puits ponctuel non-dégénéré ($U=\{x_0\}$, $V''(x_0)>0$) , on peut utiliser les développement asymptotiques des φ_j,ψ_j, et ρ_j donnés dans [1], et montrer que (sous

certaines conditions génériques), pour $x = y$ dans la boule de centre x_0 et de rayon S_0 (relativement à d), la fonction spectrale présente des pics en λ, centrés sur les $\mathrm{Re}\rho_j$, de largeur $\sim e^{-2S_0/h}$, et de hauteur $\sim e^{2(S_0-d(x,U))/h}$.

<u>Idée de la preuve du théorème 2</u> : On peut se ramener à $m=1$, et, pour z dans $\Omega(h) = (I(h)+[-a(h),a(h)]) + i[-b(h),b(h)]$, on considère le problème de Grushin :

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} &(P-z)u + u^-\varphi_1 = v \\ &\langle u,\psi_1\rangle = v^+ \end{aligned}$$

où u et v sont dans les espaces de Sobolev à poids $H(\Lambda_{tG},1)$ (resp. $H(\Lambda_{tG},\langle\xi\rangle^2)$) définis dans [1], et u^-, v^+ sont dans $\mathbb{C}$. Le problème (3.5) est inversible, et la solution s'écrit :

$$u = E_t(z)v + E_t^+(z)v^+$$

$$u^- = E_t^-(z)v + E_t^{-+}(z)v^+.$$

Appliquant ceci à $u = (P_\eta - z)^{-1}v$ et $u^-=0$, on obtient une formule liant la résolvante de P à celle de P_η, faisant intervenir ρ_1, φ_1, et ψ_1. Le théorème s'en déduit alors par diverses estimations de Sobolev et d'Agmon sur les noyaux des différents opérateurs qui interviennent.

#

REFERENCES :

[1] B.Helffer-J.Sjöstrand : Résonances en limite semiclassique, Bulletin de la S.M.F. (mémoires) n°24/25, tome 114 (1986).

[2] B.A.Vainberg : A complete asymptotic expansion of the spectral function of second order elliptic operators in $\mathbb{R}^n$, Math. USSR Sbornik, 51 n°1, 191-206 (1985).

[3] D.Robert-H.Tamura : Semiclassical asymptotics for local spectral densities and time delay problems in scattering processes , Preprint Nantes (1986).

[4] C.Gérard-J.Sjöstrand : Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type, Comm. in Math. Phys. 108, 391-421 (1987).

[5] C.Gérard : Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes, Prépub. Math. d'Orsay.

[6] B.Helffer-D.Robert : Calcul fonctionel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles, J. of Funct. Anal. 53, n°3, 246-268 (1983).

[7] H.Isosaki-H.Kitada : Modified wave operators with time independant modifier, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.IA, Math.,32, 77-104 (1985).

[8] C.Gérard-A.Martinez : Semiclassical asymptotics for the spectral function of long range Schrödinger operators, (en préparation).