DENISE HUET

Stabilité et convergence dans les problèmes de perturbation singulière

Journées Équations aux dérivées partielles (1986), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A6_0>

STABILITÉ ET CONVERGENCE DANS LES
****

PROBLÈMES DE PERTURBATION SINGULIÈRE
****

par Denise HUET

U.A. 750

Département de Mathématiques

Université de Nancy I

B.P. 239

54506 Vandoeuvre lès Nancy Cedex

-=-=-=-=-=-=-

§ 1.- INTRODUCTION.

J'expose ici quelques résultats, résumés dans [H1], qui m'ont été inspirés d'une part par la lecture des travaux de L. Frank et W. Wendt [F1], [FW1], [FW2] et d'autre part par les estimations a priori obtenues par B. Najman [N1] pour des perturbations singulières de problèmes aux limites dans des espaces de type Lp .

On désigne par ε un petit paramètre > 0 . Soient, pour $\varepsilon > 0$, H_ε et F_ε des espaces normés et A_ε une application linéaire de H_ε dans F_ε . On dit que la famille A_ε est inversement stable s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$(1.1)\qquad \|u\|_{H_\varepsilon} \leq C\ \|A_\varepsilon u\|_{F_\varepsilon}$$

pour tout $u \in H_\varepsilon$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit. Lorsque A_ε est bijectif on peut considérer la solution de l'équation

$$(1.2)\qquad u_\varepsilon \in H_\varepsilon \qquad A_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon$$

où f_ε est donnée dans F_ε . Sous certaines conditions (théorème 2.1), facilement vérifiables dans les applications, la stabilité inverse de A_ε implique la convergence, lorsque $\varepsilon \to 0$, de u_ε vers la solution u d'une équation du type

$$(1.3)\qquad Au = f$$

où A est un opérateur linéaire d'un espace normé H dans un espace normé F .

Dans le § 2 de cet exposé je montrerai comment les estimations du type (1.1) obtenues par L. Frank et W. Wendt dans des espaces de Sobolev à deux indices permettent d'obtenir la convergence de u_ε solution de (1.2) vers u solution de (1.3), convergence qui n'est pas étudiée dans [F1], [FW1], [FW2].

Souvent, on obtient, pour A_ε , une estimation a priori moins forte que (1.1), du type

$$(1.4)\qquad \|u\|_{H_\varepsilon} \leq C \left\{\|A_\varepsilon u\|_{F_\varepsilon} + \|u\|_{E_\varepsilon}\right\}$$

où E_ε est un espace normé convenable. Il est donc utile d'établir des conditions suffisantes pour qu'une estimation du type (1.4) implique la stabilité inverse de A_ε . C'est ce que je ferai dans le § 3 de cet exposé (lemme 3.1). Je donnerai ensuite des applications à des problèmes différentiels dans des espaces de type Lp .

§ 2.- CONVERGENCE PROPRE ET ESPACES DE SOBOLEV A DEUX INDICES.

Approximation et convergence propres [Au1], [St1], [St2].

Soient E et $(E_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ des espaces normés. On désigne par ΠE_ε le produit cartesien usuel et par (u_ε) un élément de ΠE_ε. On dit que (u_ε) et (v_ε) sont équivalents si $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{E_\varepsilon} = 0$.
Soit R une application linéaire $u \mapsto R(u)$ de E dans l'ensemble des classes d'équivalence. On dit que $(E_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et R constituent une approximation propre de E notée $\mathcal{A}(E,\Pi E_\varepsilon,R)$ si, quels que soient $u \in E$, $(u_\varepsilon) \in R(u)$ on a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{E_\varepsilon} = \|u\|_E$. On dit alors que $u_\varepsilon \in E_\varepsilon$ converge proprement vers $u \in E$, quand $\varepsilon \to 0$, et on écrit $u_\varepsilon \hookrightarrow u \ (E_\varepsilon,E,R)$ si $(u_\varepsilon) \in R(u)$.

Exemple 2.1 : Soit E un espace normé. On prend, pour $\varepsilon > 0$, $E_\varepsilon = E$, $\|\circ\|_{E_\varepsilon} = \|\circ\|_E$, et, pour $u \in E$

$$T(u) = \{(u_\varepsilon) \in \Pi E_\varepsilon \; ; \; \|u_\varepsilon - u\|_E \to 0 \text{ avec } \varepsilon\} . \tag{2.1}$$

Alors $\mathcal{A}(E,\Pi E_\varepsilon,T)$ est une approximation propre de E, appelée approximation triviale et $u_\varepsilon \hookrightarrow u \ (E_\varepsilon,E,T)$ si et seulement si u_ε converge vers u dans E au sens usuel.

Exemple 2.2.[H3] : Soient D et E des espaces de Banach tels que $D \subset E$, D étant dense dans E et l'injection de D dans E étant continue. On pose

$$E_\varepsilon = D \quad \text{et} \quad \|u\|_{E_\varepsilon} = \varepsilon^\alpha \|u\|_D + \|u\|_E$$

avec $\alpha > 0$ et, pour $u \in E$

$$S(u) = \{(u_\varepsilon) \in \Pi E_\varepsilon \; ; \; \forall\delta > 0 , \exists\varphi \in D \text{ et } \varepsilon_0 > 0 \text{ tels que } \|u-\varphi\|_E \le \delta \text{ et } \|u_\varepsilon - \varphi\|_{E_\varepsilon} \le \delta \text{ pour } \varepsilon \le \varepsilon_0\} . \tag{2.2}$$

$\mathcal{A}(E,\Pi E_\varepsilon,S)$ est une approximation propre de E et $u_\varepsilon \hookrightarrow u \ (E_\varepsilon,E,S)$ si et seulement si $u_\varepsilon \to u$ dans E et $\varepsilon^\alpha u_\varepsilon \to 0$ dans D.
On a le théorème de convergence propre suivant.

Théorème 2.1 : Soient F, F_ε, H, H_ε des espaces normés, $\mathcal{A}(F,\Pi F_\varepsilon,P)$ et $\mathcal{A}(H,\Pi H_\varepsilon,Q)$ des approximations propres de F et H respectivement.

Soit A_ε [resp. A] une application linéaire continue de H_ε dans F_ε [resp. de H dans F] . On fait les hypothèses suivantes

H1 : A est surjectif, A_ε est bijectif pour $\varepsilon > 0$.

H2 (condition de compatibilité) : Il existe un sous-espace Φ de H , dense dans H , et pour tout $\varphi \in \Phi$, il existe $(\varphi_\varepsilon) \in Q(\varphi)$ tels que $A_\varepsilon\varphi_\varepsilon \hookrightarrow A\varphi\ (F_\varepsilon,F,P)$.

H3 : La famille A_ε est inversement stable, i. e. $\exists C > 0$ telle que

(2.3) $$\|u\|_{H_\varepsilon} \leq C\ \|A_\varepsilon u\|_{F_\varepsilon} \qquad \forall u \in H_\varepsilon .$$

Alors A est bijectif et la condition $A_\varepsilon u_\varepsilon \hookrightarrow Au\ (F_\varepsilon,F,P)$ implique $u_\varepsilon \hookrightarrow u$ (H_ε,H,Q) .

De nombreuses applications de ce théorème à des problèmes de perturbations singulières ont été données dans [H2] [H3]. Dans toutes ces applications la vérification de l'hypothèse H2 est pratiquement triviale.

Espaces $\mathcal{H}^s_\varepsilon$, $s = (s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2$. [F1].

On pose

(2.4) $$\mathcal{H}^s_\varepsilon(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{array}{l} H^{s_1+s_2}(\mathbb{R}^n) \text{ muni de la norme} \\ \|u\|^s_{\varepsilon,\mathbb{R}^n} = \|\langle\xi\rangle^{s_1}\langle\varepsilon\xi\rangle^{s_2}\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{array} \right\}$$

(où, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$) , et, lorsque Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$

(2.5) $$\mathcal{H}^s_\varepsilon(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} H^{s_1+s_2}(\Omega) \text{ muni de la norme} \\ \|u\|^s_{\varepsilon,\Omega} = \operatorname*{Inf}_{\ell} \|\langle\xi\rangle^{s_1}\langle\varepsilon\xi\rangle^{s_2}\widehat{\ell u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{array} \right\}$$

l'infimum étant pris sur tous les prolongements possibles $\ell u \in H^{s_1+s_2}(\mathbb{R}^n)$ de u (pour toute distribution tempérée T , $\hat{T}$ désigne sa transformée de Fourier [Sc1]). Lorsque le bord $\partial\Omega$ de Ω est une variété compacte on définit $\mathcal{H}^s_\varepsilon(\partial\Omega)$ de manière usuelle, à l'aide de cartes locales.

On a le

Théorème 2.2 : X désigne soit $\mathbb{R}^n$, soit un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, soit la frontière d'un ouvert régulier borné. Soit $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour $u \in H^{s_1}(X)$, on pose

1°) lorsque $s_2 \geq 0$:

$$(2.6) \qquad Q_X^s(u) = \{(u_\varepsilon) \in \Pi \mathcal{H}_\varepsilon^s(X) \; ; \; \forall \delta > 0 \, ,$$

$$\exists \varphi \in H^{s_1+s_2}(X) \text{ et } \varepsilon_o > 0 \text{ tels que } \|u-\varphi\|_X^{s_1} \leq \delta$$

$$\text{et } \|u_\varepsilon - \varphi\|_{\varepsilon,X}^{s} \leq \delta \text{ pour } \varepsilon \leq \varepsilon_o\}$$

($\|\circ\|_X^{s_1}$ désigne la norme dans l'espace de Sobolev usuel $H^{s_1}(X)$).

2°) lorsque $s_2 < 0$:

$$(2.7) \qquad Q_X^s(u) = \{(u_\varepsilon) \in \Pi \mathcal{H}_\varepsilon^s(X) \, , \, \lim_{\varepsilon \to o} \|u_\varepsilon - u\|_{\varepsilon,X}^{s} = 0\} .$$

Alors $\mathcal{A}(H^{s_1}(X), \Pi\mathcal{H}_\varepsilon^s(X), Q_X^s)$ est une approximation propre de $H^{s_1}(X)$. De plus, lorsque $s_2 \geq 0$, la condition $u_\varepsilon \hookrightarrow u \; (\mathcal{H}_\varepsilon^s(X), H^{s_1}(X), Q_X^s)$ implique $\lim_{\varepsilon \to o} \|u_\varepsilon - u\|_X^{s_1} = 0$.

Application.

Exemple 2.3 : On considère le problème de perturbations singulières elliptique et coercif [F1], relatif à l'opérateur $Q(x,\varepsilon,D)$ d'ordre $2(r_1+r_2)$ avec $r_1 \geq 0$ et $r_2 > 0$:

$$(2.8) \qquad \begin{cases} Q(x,\varepsilon,D)u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega \\ \pi_o B_j(x,\varepsilon,D)u_\varepsilon = g_j & \text{sur } \partial\Omega \, , \; 1 \leq j \leq r_1 + r_2 \, , \end{cases}$$

où B_j est d'ordre $m_j + p_j$ avec $m_1 \leq \ldots \leq m_{r_1} < m_{r_1+1} \leq \ldots \leq m_{r_1+r_2}$ et où π_o est l'opérateur de restriction à $\partial\Omega$, et le problème limite

$$(2.9) \qquad \begin{cases} Q(x,0,D)w = f & \text{dans } \Omega \\ \pi_o B_j(x,0,D)w = g_j & \text{sur } \partial\Omega \, , \; 1 \leq j \leq r_1 \end{cases}$$

où $Q(x,0,D)$ est d'ordre $2r_1$ et $B_j(x,0,D)$ d'ordre m_j .

On pose $\nu = (2r_1, 2r_2)$. Soit $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $s_2 \geq r_2$,

$m_{r_1} + \frac{1}{2} < s_1 < m_{r_1+1} + \frac{1}{2}$ et $s_1 + s_2 \geq \underset{1 \leq j \leq r_1+r_2}{\mathrm{Max}} \{m_j + p_j\} + \frac{1}{2}$.

Lorsque les problèmes (2.8) et (2.9) admettent une solution unique, la solution u_ε de (2.8) satisfait à l'inégalité

$$\|u_\varepsilon\|^s_{\varepsilon,\Omega} \leq C \left\{ \|f\|^{s-\nu}_{\varepsilon,\Omega} + \sum_{j=1}^{r_1} \|g_j\|^{\tau_j}_{\varepsilon,\partial\Omega} + \sum_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} \varepsilon^{\alpha_j} \|g_j\|^{\sigma_j}_{\varepsilon,\partial\Omega} \right\} \tag{2.10}$$

avec $\tau_j = (s_1 - m_j - \frac{1}{2}, s_2 - p_j)$, $\sigma_j = (0, s_1 + s_2 - m_j - p_j - \frac{1}{2})$,

$\alpha_j = -s_1 + m_j + \frac{1}{2} > 0$ pour $j \geq r_1 + 1$,

On peut alors appliquer le théorème 2.1 en associant à ces problèmes les espaces :

$$F_\varepsilon = \mathcal{H}^{s-\nu}_\varepsilon(\Omega) \times \sum_{j=1}^{r_1} \mathcal{H}^{\tau_j}_\varepsilon(\partial\Omega) \times \sum_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} \mathcal{H}^{\sigma_j}_\varepsilon(\partial\Omega)$$

$$F = H^{s_1-\nu_1}(\Omega) \times \sum_{j=1}^{r_1} H^{s_1-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

les opérateur A_ε et A définis par

$$A_\varepsilon u = \left(Q(x,\varepsilon,D)u \ , \ \prod_{j=1}^{r_1} \pi_o \, B_j(x,\varepsilon,D)u \ , \ \prod_{r_1+1}^{r_1+r_2} \varepsilon^{\alpha_j} \pi_o \, B_j(x,\varepsilon,D)u \right)$$

$$Au = \left(Q(x,0,D)u \ , \ \prod_{j=1}^{r_1} \pi_o \, B_j(x,0,D)u \right)$$

et l'approximation propre $\mathcal{A}(F, \Pi F_\varepsilon, R)$ définie pour $u = (u_o, \prod_1^{r_1} u_j) \in F$ par

$$R(u) = \left(Q^{s-\nu}_\Omega u_o , \prod_1^{r_1} Q^{\tau_j}_{\partial\Omega} u_j , 0 \right) .$$

L'hypothèse H 2 est équivalente à la condition suivante, facilement vérifiable

$$(2.11)\quad \begin{cases} \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \text{ , on a} \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|Q(x,\varepsilon,D)\varphi - Q(x,0,D)\varphi\|^{s-\nu}_{\varepsilon,\Omega} = 0 \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|B_j(x,\varepsilon,D)\varphi - B_j(x,0,D)\varphi\|^{\tau_j}_{\varepsilon,\partial\Omega} = 0 \qquad 1 \le j \le r_1 \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\varepsilon^{\alpha_j} B_j(x,\varepsilon,D)\varphi\|^{\sigma_j}_{\varepsilon,\partial\Omega} = 0 \qquad r_1+1 \le j \le r_1+r_2 \end{cases}$$

Par suite u_ε converge vers w dans $H^{s_1}(\Omega)$.

Remarque : Dans le cas particulier où

$$Q(x,\varepsilon,D) = \varepsilon^{2r_2} R(x,D) + Q(x,0,D)$$

et
$$B_j(x,\varepsilon,D) = B_j(x,D) \qquad 1 \le j \le r_1 + r_2$$

les conditions (2.11) sont trivialement vérifiées puisque l'on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\varepsilon^{2r_2} R(x,D)\varphi\|^{s-\nu}_{\varepsilon,\Omega} = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2r_2} \|R(x,D)\varphi\|^{s_1-\nu_1}_{\Omega} = 0$$

et, pour $r_1 + 1 \le j \le r_1 + r_2$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\varepsilon^{\alpha_j} B_j(x,D)\varphi\|^{\sigma_j}_{\varepsilon,\partial\Omega} = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\alpha_j} \|B_j(x,D)\varphi\|^{o}_{\partial\Omega} = 0 \ .$$

La démonstration du théorème 2.2 et d'autres applications seront données dans [H4].

§ 3.- STABILITE INVERSE D'UNE FAMILLE D'OPERATEURS SATISFAISANT A UNE INEGALITE DU TYPE (1.4) ET APPLICATIONS.

Soient G et E des espaces normés, H un espace de Banach réflexif tels que $G \subset H \subset E$ avec injections continues. Pour $\varepsilon > 0$, on désigne par H_ε l'espace G muni d'une norme $\|\circ\|_\varepsilon$ dépendant de ε . Soient, pour $\varepsilon > 0$, F_ε un espace normé et A_ε une application linéaire de H_ε dans F_ε . En utilisant un argument de compacité on montre facilement, (cf. [H4]), le

Lemme 3.1 : On fait les hypothèses suivantes :

h1 : L'injection de H dans E est compacte.

h2 : Il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$\|u\|_H \leq C \|u\|_\varepsilon \tag{3.1}$$

pour tout $u \in G$ et tout $\varepsilon > 0$.

h3 : Il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$\|u\|_{H_\varepsilon} \leq C \{\|A_\varepsilon u\|_{F_\varepsilon} + \|u\|_E\} \tag{3.2}$$

pour tout $u \in G$ et tout ε assez petit.

h4 : Les conditions $\varepsilon_n \to 0$, $u_n \in G$ converge faiblement vers u_o dans H et $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_{\varepsilon_n} u_n\|_{F_{\varepsilon_n}} = 0$ impliquent $u_o = 0$.

Alors la famille A_ε est inversement stable.

Applications à des problèmes différentiels dans des espaces de type L_p , $1 < p < \infty$.

Exemple 3.1. Problème de Dirichlet : Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Pour $s \in \mathbb{R}$, $W_p^s(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_p^s(\Omega)$ sont les espaces de Sobolev usuels. Pour p fixé, lorsqu'aucune confusion n'est possible, on note $\|\circ\|_s$ la norme dans $W_p^s(\Omega)$. Soient A et B des opérateurs différentiels linéaires, fortement elliptiques à coefficients réguliers, d'ordre $2m$ et $2m'$ avec $m > m' \geq 0$. On pose $A_\varepsilon = \varepsilon A + B$ et on suppose que, pour $f \in W_p^{-m'}(\Omega)$, les problèmes de Dirichlet

$$u_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega) \qquad A_\varepsilon u_\varepsilon = f \tag{3.3}$$

et

$$w \in \overset{\circ}{W}{}_p^{m'}(\Omega) \qquad Bw = f \tag{3.4}$$

admettent une solution unique. Dans [N1], B. Najman a montré qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$\|u\|_{m'} \leq C \{\|A_\varepsilon u\|_{-m'} + \|u\|_o\} \tag{3.5}$$

pour tout $u \in \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega) \cap W^{2m-m'}_p(\Omega) = G$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit. De plus, l'hypothèse h4 est trivialement vérifiée lorsqu'on prend $H_\varepsilon = G$ muni de la norme $\|\circ\|_{m'}$, $H = \overset{\circ}{W}{}^{m'}_p(\Omega)$, $F_\varepsilon = W^{-m'}_p(\Omega)$ et $E = L_p(\Omega)$. En utilisant le lemme 3.1, on obtient donc, pour la solution de (3.3), l'estimation

$$(3.6) \qquad \|u_\varepsilon\|_{m'} \leq C \, \|A_\varepsilon u_\varepsilon\|_{-m'} \, .$$

Grâce à (3.6), on peut alors, comme dans le cas $p = 2$, montrer que u_ε converge vers w dans $W^{m'}_p(\Omega)$ et préciser la rapidité de convergence par interpolation (cf. [H5]), faire apparaître une couche limite à la frontière en améliorant la convergence à l'intérieur de Ω (cf. [H6]), construire des correcteurs comme dans [L1], etc...

Notons que des estimations a priori, pour la solution de (3.3), dans des normes dépendant de ε, ont été obtenues dans [Gu1].

<u>Exemple 3.2. Conditions aux limites générales</u> : On remplace maintenant, dans les problèmes (3.3) et (3.4) les conditions de Dirichlet par des conditions aux limites générales.

Le cas où $m' = 0$, $B = I$ a été élucidé dans [H7] en utilisant les estimations établies par S. Agmon [Ag1] pour la résolvante associée au problème (3.3). C'est ce lien entre les problèmes de perturbation singulière et l'étude des résolvantes associées qui a été exploité par G. Grubb [Gr1], lorsque $p = 2$.

Lorsque $m' \neq 0$, l'hypothèse h4 du lemme 3.1 est encore satisfaite en posant $F_\varepsilon = E = L_p(\Omega)$ et en choisissant convenablement G, H_ε, H (cf. [H1] et [H4]). Mais dans ce cas, des estimations a priori du type (3.2) ne sont pas connues.

D'autres applications du lemme 3.1 seront données dans [H4].

<u>BIBLIOGRAPHIE.</u>

[Ag1] S. AGMON : On the eigenfunctions and the eigenvalues of general boundary value problems ; Comm. Pure App. Math. 15, 1962, 119-147.

[Au1] J.P. AUBIN : Approximations des espaces de distributions et des opérateurs différentiels ; Bull. Soc. Mat. France 12, 1967, 1-139.

[F1] L.S. FRANK : Coercive singular perturbations I : a priori estimates ; Ann. Mat. Pura Appl. 119, 1979, 41-113.

[FW1] L.S. FRANK and W.D. WENDT : Coercive singular perturbations II : reduction to regular perturbations and applications ; Comm. Partial. Diff. Equ. 7, 1982, 469-535.

[FW2] L.S. FRANK and W.D. WENDT : Coercive singular perturbations III : Wiener-Hopf operators ; Jour. Anal. Math. 43, 1984, 88-135.

[Gr1] G. GRUBB : Une méthode pseudo-différentielle pour les perturbations singulières elliptiques ; Compt. Rend. Acad. Sc. Paris 301, 1985, 427-430 et exposé aux Journées de Saint Jean de Monts 1986.

[Gu2] M. GUEUGNON : Perturbations singulières dans les espaces L_p ; Compt. Rend. Acad. Sc. 301, 1985, 555-558.

[H1] D. HUET : Convergence propre et perturbations singulières coercives ; Compt. Rend. Acad. Sc. Paris 301, 1985, 435-437 et Stabilité inverse d'une famille d'opérateurs dépendant d'un paramètre ; Compt. Rend. Acad. Sc. Paris 301, 1985, 675-677.

[H2] D. HUET : Perturbations singulières de problèmes elliptiques ; Lect. Notes in Math., Springer Verlag 594, 1977, 288-300.

[H3] D. HUET : Analytical and numerical approaches to asymptotic problems in analysis ; O. Axelsson, L.S. Frank, A. van der Sluis (eds), North-Holland, 1981, 87-98.

[H4] D. HUET : A paraître.

[H5] D. HUET : Décomposition spectrale et opérateurs ; Presses Universitaires de France, Paris, 1977.

[H6] D. HUET ; Singular perturbations of elliptic problems. Ann. di Mat. 95, 1973, 77-114.

[H7] D. HUET : Perturbations singulières dans les espaces L_p ; Rev. Faculdade Cienc. Liboa 11, 1965, 137-164 et Boll. Un. Mat. Ital. 21, 1966, 219-227.

[L1] J.L. LIONS : Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal ; Lect. Notes in Math., Springer Verlag 323, 1973.

[N1] B. NAJMAN : Singular perturbations in L_p ; A paraître dans Glas. Mat. Ser. III, Zagreb.

[Sc1] L. SCHWARTZ : Théorie des distributions ; Hermann, Paris, 1966.

[St1] F. STUMMEL : Diskrete konvergenz linearer operatoren ; Math. Ann. 190, 1970, 45-92.

[St2] F. STUMMEL : Conference on the theory of ordinary and partial differential equations ; Lect. Notes in Math., Springer Verlag 280, 1972, 155-181.