

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CLAUDE WAGSCHAL

## Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques tangentes

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1986), p. 1-8

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1986\\_\\_\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A3_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ À CARACTÉRISTIQUES TANGENTES

Claude WAGSCHAL

Dans cet exposé, on étudie le problème de Cauchy ramifié pour des opérateurs à caractéristiques multiples lorsque les racines caractéristiques sont holomorphes. On se propose essentiellement de montrer comment le théorème de représentation intégrale de [8, théorème 1.2] peut être utilisé pour déterminer le support singulier de la solution.

### 1. REPRESENTATION INTEGRALE DE LA SOLUTION

On considère au voisinage de l'origine de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , de coordonnées  $x = (x_j)_{0 \leq j \leq n}$ , un opérateur différentiel linéaire holomorphe du second ordre  $a(x, D)$  de symbole principal

$$g(x, \xi) = (\xi_0 - \lambda_0(x, \xi')) (\xi_0 - \lambda_1(x, \xi'))$$

où les  $\lambda_i$  sont holomorphes au voisinage du point  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{\xi}' = (1, 0, \dots, 0)$  et

$$(1.1) \quad \lambda_0(\bar{x}, \bar{\xi}') = \lambda_1(\bar{x}, \bar{\xi}').$$

On considère le problème de Cauchy ramifié

$$(1.2) \quad \begin{cases} a(x, D)u(x) = 0, \\ D_0^h u(x) \Big|_S = w_h(x'), \quad h = 0, 1, \end{cases}$$

où  $S : x_0 = 0$ , les fonctions  $w_h$  sont ramifiées autour de l'hyperplan

$$T : x_0 = x_1 = 0,$$

autrement dit, les fonctions  $w_h$  sont holomorphes au voisinage (relativement à  $S$ ) d'un point  $y \in S-T$  et se prolongent analytiquement le long de tout chemin  $\gamma : I \rightarrow \Omega-T$ ,  $I = [0,1]$ , d'origine  $y$ ,  $\Omega$  désignant un voisinage ouvert connexe de l'origine dans  $S$ .

On note  $k_i(x)$  ( $i = 0,1$ ) la solution du problème de Cauchy

$$D_0 k_i(x) = \lambda_i(x, D'k_i(x)), \quad k_i(0, x') = x_i,$$

et  $K_i : k_i(x) = 0$  les hypersurfaces caractéristiques issues de  $T$ .

D'après le théorème 1.2 de [2], la solution de (1.2) peut s'écrire au voisinage du point  $y$  sous la forme  $u(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} I_m(x)$ ,

$$(1.3) \quad I_m(x) = \int_{S_m(x_0)} u_m(\varphi_m(\sigma, x), \sigma, x) d\sigma_1 \wedge \dots \wedge d\sigma_m, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m),$$

où

- $S_m(x_0)$  désigne le  $m$ -simplexe singulier de  $\mathbb{C}^m$

$$S_m(x_0) : t \in \Delta_m \mapsto x_0 + t \in \mathbb{C}^m,$$

$$\Delta_m = \left\{ t \in \mathbb{R}^m ; 0 \leq t_m \leq \dots \leq t_1 \leq 1 \right\};$$

- les fonctions  $u_m(t, \sigma, x)$  sont holomorphes au voisinage du point  $t = y_1$ ,  $\sigma = 0$ ,  $x = y$  et se prolongent analytiquement à  $\mathfrak{R}_\omega \times \Omega_r^m$  où  $\mathfrak{R}_\omega$  ( $\omega > 0$ ) désigne le revêtement universel du disque pointé  $\dot{D}_\omega = \{t \in \mathbb{C} ; 0 < |t| < \omega\}$  et

$$\Omega_r^m = \left\{ (\sigma, x) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n+1} ; \|\sigma\| + \sum_{j=1}^{m-1} |\sigma_j - \sigma_{j+1}| + \|x'\| < r \right\},$$

en outre, il existe  $c > 0$  et, pour tout compact  $K \subset \mathfrak{R}_\omega$ , il existe  $c_K > 0$  tel que

$$(1.4) \quad |u_m(t, \sigma, x)| \leq c_K c^m m! \text{ pour } (t, \sigma, x) \in K \times \Omega_r^m;$$

- les fonctions  $\varphi_m$  sont holomorphes sur  $\Omega_r^m$  et s'obtiennent en résolvant les problèmes de Cauchy du premier ordre ( $m \leq 1$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 \varphi_m(\sigma, x) = \lambda_m(x, D' \varphi_m(\sigma, x)), \\ \varphi_m(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, x) = \varphi_{m-1}(\sigma_2, \dots, \sigma_m, x), \text{ pour } x_0 = \sigma_1, \end{array} \right.$$

où  $\lambda_m = \lambda_0$  si  $m$  est pair,  $\lambda_m = \lambda_1$  si  $m$  est impair et  $\varphi_0(x) = k_0(x)$ .

Note. On a  $I_0(x) = u_0(k_0(x), x)$ ,

$$I_1(x) = \int_0^{x_0} u_1(\varphi_1(\sigma_1, x), \sigma_1, x) d\sigma_1$$

$$I_2(x) = \int_0^{x_0} d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} u_2(\varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, x), \sigma_1, \sigma_2, x) d\sigma_2, \text{ etc } \dots$$

Le problème est donc de prolonger analytiquement chacune des fonctions  $I_m$ , considérées comme des germes de fonctions holomorphes au point  $y$ , puis de s'assurer de la convergence de la série

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} I_m.$$

Lorsque

$\{\xi_0 - \lambda_0(x, \xi'), \xi_1 - \lambda_1(x, \xi')\} = 0$ , cette série se réduit à ses deux premiers termes et la détermination du support singulier de  $u$  se réduit à celle du support singulier de  $I_1$ .

Dans la suite, nous allons nous intéresser au cas où  $K_0$  et  $K_1$  (qui sont tangentes en  $O$ ) sont tangentes tout le long de  $T$  avec un contact d'ordre constant.

Examinons d'abord le cas où  $K_0 = K_1$ .

## 2. CARACTERISTIQUES CONFONDUES.

On suppose  $K_0 = K_1 \equiv K$ ; on peut bien entendu supposer que  $K$  a pour équation locale  $x_1 = 0$ .

Exemple. L'exemple le plus simple est l'opérateur de symbole principal  $g(x, \xi) = \xi_0(\xi_0 - x_0 x_1 \xi_1)$  pour lequel  $\{\xi_0, \xi_0 - x_0 x_1 \xi_1\} = x_1 \xi_1$ .

On peut alors démontrer le

LEMME 2.1. Pour  $r > 0$  suffisamment petit, on a

$\varphi_m(\sigma, x) = x_1 \Phi_m(\sigma, x)$ ,  $(\sigma, x) \in \Omega_r^m$ , où la fonction  $\Phi_m$  est holomorphe sur  $\Omega_r^m$  et  $|\Phi_m - 1| < \frac{1}{2}$ .

Posons alors

$$\mathcal{U}(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{S_m(x_0)} u_m(t\Phi_m(\sigma, x), \sigma, x) d\sigma_1 \wedge \dots \wedge d\sigma_m ;$$

cette fonction est bien définie et holomorphe sur  $\mathbb{R}_{\omega/2} \times \left\{ x \in \mathbb{C}^{n+1} ; \|x\| < r \right\}$  et  $u(x) = \mathcal{U}(x_1, x)$ , ce qui prouve la

**PROPOSITION 2.1.** *Lorsque  $K_0 = K_1 (=K)$ , la solution du problème de Cauchy (1.2) est ramifiée autour de  $K$ .*

### 3. UNE CLASSE D'OPERATEURS A CARACTERISTIQUES TANGENTES.

Lorsque  $K_0 \neq K_1$ ,  $K_0$  et  $K_1$  étant tangentes le long de  $T$  avec un contact d'ordre constant, on peut choisir des coordonnées locales au voisinage de l'origine de  $\mathbb{C}^{n+1}$  telles que

$$K_0 : x_1 = 0, \quad K_1 : x_1 - x_0^q = 0, \quad q \geq 2.$$

Nous allons étudier l'opérateur le plus simple admettant ces hypersurfaces caractéristiques, à savoir

$$g(x, \xi) = \xi_0 (\xi_0 + qx_0^{q-1} \xi_1) ;$$

on a alors

$$k_0(x) = x_1, \quad k_1(x) = x_1 - x_0^q$$

et

$$\varphi_m(\sigma, x) = k_m(x) + \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \sigma_j^q$$

où  $k_m = k_0$  si  $m$  est pair,  $k_m = k_1$  si  $m$  est impair.

On se propose de prolonger analytiquement le germe  $u$ , solution de (1.2), à un ouvert aussi grand que possible du revêtement universel  $\hat{X}$  de  $X = \mathbb{C}^{n+1} - K_0 \cup K_1$ .

Pour énoncer notre théorème, nous avons besoin de mesurer l'enlacement autour de  $K_0 \cup K_1$  de tout chemin  $\gamma : I \rightarrow X$  d'origine  $y$ , cet enlacement  $J(\gamma) \geq 0$  ne dépendant que de la classe d'homotopie (avec extrémités fixes) de  $\gamma$  : il s'agit donc de construire une fonction  $J : \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

Il suffit de faire cette construction dans le plan complexe privé de  $q$  points en utilisant la fonction  $g$  suivante. Posons

$Y = f^{-1}(\mathbb{C}^*)$  où  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  désigne l'application  $f(z) = z^q + 1$  et soit  $\hat{Y}$  le revêtement universel de  $Y$ . Notons  $\pi : \hat{X} \rightarrow X$ ,  $\pi' : \hat{Y} \rightarrow Y$  les surjections canoniques et choisissons des points  $\hat{y} \in \hat{X}$  et  $\hat{0} \in \hat{Y}$  tels que  $\pi(\hat{y}) = y$ ,  $\pi'(\hat{0}) = 0$ . Choisissons une détermination holomorphe sur  $\hat{X}$  de  $(-x_1)^{\frac{1}{q}}$  et posons  $g(\hat{x}) = x_0 (-x_1)^{-\frac{1}{q}}$ ; on définit ainsi une fonction holomorphe  $g : \hat{X} \rightarrow Y$   $\left( \text{car } g(\hat{x})^q + 1 = \frac{k_1(x)}{k_0(x)} \in \mathbb{C}^* \right)$  qui se relève en une application  $\hat{g} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  telle que  $\hat{g}(\hat{y}) = \hat{0}$ .

On posera alors  $J = J'$ .  $\hat{g}$  où  $J' : \hat{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est défini de la façon suivante.

Soit  $R : \mathbb{C}^* \times I \rightarrow \mathbb{C}^*$  la rétraction par déformation de  $\mathbb{C}^*$  sur  $S^1$ , il existe une unique application continue  $R' : Y \times I \rightarrow Y$  telle que

$$f \circ R' = R \circ (f \times I_d), \quad R'(z, 0) = z;$$

on obtient ainsi une rétraction par déformation de  $Y$  sur  $K = f^{-1}(S^1)$ . Le groupe fondamental  $\pi_1(K; 0)$  est engendré par les lacets  $(\alpha_p)_{0 \leq p < q}$  où

$$\alpha_p(t) = (2 \sin \pi t)^q e^{\frac{1}{2} (t+2p+\frac{1}{2}) \frac{\pi i}{q}} \quad (p \in \mathbb{Z}).$$

Considérons alors un chemin  $\gamma : I \rightarrow Y$  d'origine 0;  $\gamma$  est homotope dans  $Y$  au chemin  $\gamma_1 \gamma_2$  où

$$\gamma_1(t) = R'(\gamma(t), 1), \quad \gamma_2(t) = R'(\gamma(1), 1-t).$$

La classe d'homotopie dans  $K$  de  $\gamma_1$  ne dépend que de celle de  $\gamma$  et il existe un unique chemin  $\gamma'_1 : I \rightarrow K$  homotope à  $\gamma_1$  qui soit de la forme

$$\gamma'_1(t) = \begin{cases} \lambda_j (J't + 1 - j), & \frac{j-1}{J'} \leq t \leq \frac{j}{J'}, \quad 1 \leq j \leq [J'], \\ \lambda_{[J'] + 1} (J't - [J']), & \frac{[J']}{J'} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

où  $J'$  est un nombre réel  $\geq 0$ ,  $[J']$  désigne sa partie entière, chaque  $\lambda_j$  est l'un des lacets  $\alpha_p$ ,  $\alpha_p^{-1}$  ( $0 \leq p < q$ ) et  $\lambda_{j+1} \neq \lambda_j^{-1}$ . Vu

que  $J' = J'(\gamma)$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\gamma$ , on peut définir une fonction continue  $J' : \hat{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant simplement

$$J'(\hat{z}) = J'(\gamma) \quad \text{où } \gamma = \pi' \circ \hat{\gamma}, \quad \hat{\gamma} : I \rightarrow \hat{Y} \text{ est un chemin d'origine } \hat{0} \text{ et d'extrémité } \hat{z}.$$

*Note.* Soit  $\hat{x} \in \hat{X}$  tel que  $\pi(\hat{x}) \in S-T$ , alors  $J(\hat{x}) \in \mathbb{N}$  car  $\hat{g}(\hat{x}) = \hat{0}$ .

Considérons alors, pour  $a > 0$ , l'ouvert de  $\hat{X}$

$$U_a = \left\{ \hat{x} \in \hat{X} ; a(J(\hat{x}) + 1) \times \text{Max}_{i=0,1} |k_i(x)|^{\frac{1}{q}} + |x_1| < \frac{r}{2} \text{ et } \|x''\| < \frac{r}{2} \right\}$$

où  $x = \pi(\hat{x})$ ,  $x'' = (x_j)_{2 \leq j \leq n}$ . On peut démontrer que cet ouvert est simplement connexe et on a le

**THEOREME 3.1.** *Si l'opérateur  $a(x,D)$  a pour symbole principal  $\xi_0 (\xi_0 + q x_0^{q-1} \xi_1)$ , il existe  $a > 0$  tel que la solution du problème de Cauchy (1.2) se prolonge analytiquement à  $U_a$ .*

#### 4. METHODE

Le prolongement analytique des fonctions  $I_m$  s'effectue en déformant continûment la classe d'homologie relative du simplexe d'intégration (voir [2], [3], [4]). Considérons les faces de  $\Delta_m$

$$\Delta_m^j = \{t \in \Delta_m ; t_j = t_{j+1}\} \quad (0 \leq j \leq m) \quad \text{où } t_0 = 1, t_{m+1} = 0$$

et les hyperplans de  $\mathbb{C}^m$

$$H^j(x_0) = \left\{ \sigma \in \mathbb{C}^m ; \sigma_j = \sigma_{j+1} \right\} \quad (0 \leq j \leq m) \quad \text{où } \sigma_0 = x_0, \sigma_{m+1} = 0 ;$$

on a alors  $S_m(x_0)(\Delta_m^j) \subset H^j(x_0)$  : le simplexe  $S_m(x_0)$  est un cycle

relatif de  $\left( \mathbb{C}^m, \bigcup_{j=0}^m H^j(x_0) \right)$  et l'intégrale (1.3) ne dépend que de

la classe d'homologie relative de ce cycle.

On construit alors un  $m$ -simplexe singulier de  $\mathbb{C}^m$  dépendant continûment de  $\hat{x} \in \hat{X}$ , c'est-à-dire une application continue

$$T_m : \hat{X} \times \Delta_m \rightarrow \mathbb{C}^m$$

telle que

$$T_m(\hat{y}, t) = 0, \quad t \in \Delta_m,$$

$$\varphi_m(T_m(\hat{x}, t), x) \neq 0, \quad x = \pi(\hat{x}),$$

$$T_m(\hat{x}, \Delta_m^j) \subset H^j(x_0), \quad 0 \leq j \leq m.$$

On montre ensuite que, pour  $a > 0$  suffisamment grand,

$$\left( T_m(\hat{x}, t), x \right) \in \Omega_r^m, \quad \text{pour tout } (\hat{x}, t) \in \mathcal{U}_a \times \Delta_m.$$

Vu le théorème 1.3 de [2], on sait alors que  $I_m$  se prolonge analytiquement à l'ouvert  $\mathcal{U}_a$ .

La construction explicite d'un tel simplexe  $T_m$  et la démonstration de la convergence de la série  $\sum_{m \in \mathbb{N}} I_m$  sont données au détail dans [9]. Ceci permet de démontrer le théorème 3.1.

*Note.* Le théorème 3.1 vaut en fait pour une classe très générale d'opérateurs à caractéristiques doubles (cf. [10]).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. FOTIADI, M. FROISSART, J. LASCOUX and P. PHAM.- Applications of an isotopy theorem, *Topology* 4, 1965, p. 159-191.
- [2] T. KOBAYASHI.- On the singularities of the solution to the Cauchy problem with singular data in the complex domain, *Math. Ann.* 269, 1984, p. 217-234.
- [3] J. LERAY.- Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), *Bull. Soc. Math. France*, 87, 1959, p. 81-180.
- [4] J. LERAY.- Un complément au théorème de N.Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique, *Bull. Soc. Math. France*, 95, 1967, p. 313-374.
- [5] N. NILSSON.- Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds, *Arkiv för Math.*, 5, 1963, p. 463-476.



[6] F. PHAM.- Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau, Mémorial des Sciences Mathématiques, 164, 1967.

[7] D. SCHILTZ, J. VAILLANT et C. WAGSCHAL.- Problème de Cauchy ramifié : racine caractéristique double ou triple en involution, J. Math. pures et appl. 4, p. 423-443.

[8] C. WAGSCHAL.- Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples holomorphes de multiplicité variable. J. Math. pures et appl. 62, 1983, p. 99-127.

[9] C. WAGSCHAL.- Problème de Cauchy ramifié pour une classe d'opérateurs à caractéristiques tangentes, J. Math. pures et appl., à paraître.

[10] C. WAGSCHAL.- en préparation.

Claude Wagschal  
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées  
58, boulevard Lefebvre  
75732 PARIS Cedex 15