PATRICK GÉRARD
JEFF RAUCH

# Propagation de la régularité locale de solutions d'équations hyperboliques non linéaires

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1986), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A16_0>

# Propagation de la régularité locale de solutions d'équations hyperboliques non linéaires

P. Gérard
Université de Paris-Sud
91 405 ORSAY

J. Rauch
University of Michigan
ANN ARBOR

et

Ecole Normale Supérieure
45, rue d' Ulm
75 230 PARIS CEDEX 05

## 1. Introduction et énoncé des résultats.

Dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit u une solution de l'équation :

(1) $$F(x,\partial^\alpha u)=0$$

Lorsque u est de classe $H^s$ avec $s>n/2+d$ (d est un indice mesurant la non-linéarité de (1), et vaut m si l' équation est complètement non linéaire), le calcul symbolique paradifférentiel de J.-M. Bony, exposé dans [1], permet de montrer que, pour $t\leqslant 2s-n/2-d$, les singularités microlocales $H^t$ de u se propagent le long des bicaractéristiques de l' opérateur linéarisé P associé à (1). En particulier, pour tout $r>s$, la régularité locale $H^r$ de u se propage à travers toute hypersurface que les bicaractéristiques réelles de P coupent transversalement.

Cependant, l' équation (1) peut avoir génériquement un sens pour des solutions a priori beaucoup moins régulières : il suffit, par exemple, que toutes les dérivées de u soumises à une opération non linéaire soient $L^{\infty}$.

Le travail ( voir [5] ) que nous présentons ici se propose de généraliser la propagation de la régularité locale à de telles solutions; pour plus de simplicité, nous nous sommes restreints au cas d' une équation hyperbolique; cependant, la méthode ( régularisation et estimations a priori ) s' adapte à des situations plus générales. (opérateurs de type principal ....)

*Notations:* dans la suite, $\Omega$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, S une hypersurface $C^2$ de $\Omega$, divisant $\Omega$ en deux composantes $\Omega^-$ et $\Omega^+$, et $y_0$ est un point de S.

## *a) Cas des équations semi-linéaires.*

*Théorème 1:* Soit $u \in L^{\infty}(\Omega)$ une solution du système

$$\text{(2)} \qquad Lu = f(y,u)$$

où L est un opérateur différentiel matriciel d' ordre 1, strictement (ou symétrique) hyperbolique par rapport à S près de $y_0$, et où f est une fonction $C^{\infty}$ de ses arguments.

On suppose que, pour s>0, $u \in H^s_{loc}(\Omega)$. Alors $u \in H^s$ prés de $y_0$.

*Remarques:*

(i) Lorsque $s>n/2$, le théorème 1 est conséquence du résultat standard d' existence locale de solutions régulières. Précisément, on peut montrer, à l' aide des inégalités de Gagliardo-Nirenberg, que, pour $t<0$, les traces de u parallèlement à S restent bornées dans $H^s$, ce qui permet de construire une solution w de (2) $H^s$ près de $y_0$, égale à u pour $t<0$. Enfin, l' unicité locale des solutions $L^\infty$ de (2) entraîne que $w= u$ près de $y_0$.

(ii) Pour $s \in [0,1]$, on peut donner une démonstration analogue, une fois remarqué que, u étant bornée, on peut supposer f à support compact, et en particulier lipschitzienne: l' espace $H^s$ est alors préservé par $u \rightarrow f(u)$, et on peut résoudre globalement en temps le problème de Cauchy dans cet espace.

(iii) En revanche, dans le cas $s \in ]1,n/2[$, l' exemple suivant montre qu' on ne peut plus espérer d' existence locale $H^s$, même si $f \in C_0^\infty$:

Supposons que s est entier, pour simplifier; alors, si f n' est pas identiquement nulle, il existe $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(\psi) \notin H^s_{loc}$.(voir Dahlberg [4] ). Le problème de Cauchy suivant:

pour $u=(u_1,u_2)$: $\quad u_t=(0,f(u_1))$ , $u(0)=(\psi,0)$

a pour solution $(\psi,tf(\psi))$, qui n' est pas dans $H^s_{loc}$.

Le théorème 1 n' est donc pas lié au fait que le problème de Cauchy soit bien posé.

(iv) La démonstration du théorème 1 repose essentiellement sur le contrôle d'une régularisée de $f(u)$ en fonction de la régularisée de u. On montre, par la même méthode, le résultat analogue pour des équations d'ordre supérieur:

*Théorème 1bis:* Soit u une solution de :

(3) $$Pu = F(y, \partial^\alpha u)_{|\alpha| \leqslant p},$$

vérifiant $\partial^\alpha u \in L^\infty(\Omega)$ pour $|\alpha| \leqslant p$, où P est un système d'opérateurs différentiels d'ordre $m \geqslant p+1$, strictement (ou symétrique ) hyperbolique par rapport à S près de $y_0$ ; F est $C^\infty$ de ses arguments .
On suppose que, pour $s>p$, $u \in H^s(\Omega^-)$.
Alors $u \in H^s$ près de $y_0$ .

*b)Cas des équations quasi-linéaires.*

*Théorème 2:* soit u une solution lipschitzienne du système :

(4) $$\sum A_j(y,u)\partial_j u = f(y,u) \quad , 1 \leqslant j \leqslant n+1,$$

l'opérateur $L = \Sigma\, A_j(y,u)\partial_j$ étant strictement (ou symétrique) hyperbolique par rapport à S près de $y_0$ ,f étant $C^\infty$ de ses arguments.
On suppose que,pour $s>1$, $u \in H^s_{loc}(\Omega^-)$.
Alors $u \in H^s$ près de $y_0$ .

*Remarques:*

(i)Là encore, si $s>n/2+1$, le résultat est classique, (cf. Majda [6]), fondé à nouveau sur l' existence locale pour le problème de Cauchy.

(ii) Comme au a), on peut énoncer un résultat analogue pour des équations quasi-linéaires d' ordre supérieur, et même, sous réserves de dériver l' équation, pour des équations complètement non linéaires: la régularité a priori permettant de conclure est alors $\partial^\alpha u \in L^\infty$ pour $|\alpha| \leqslant m+1$, si m est l' ordre de l' équation.

(iii) De même que le théorème 1 permet de propager la régularité de solutions de (2) qui peuvent être a priori discontinues, le théorème 2 permet d' étudier des solutions de (4) dont la première dérivée peut admettre des discontinuités.

Notons cependant que (4) a un sens pour des solutions non lipschitziennes, par exemple $C^{1/2}$; un cas particulièrement intéressant est celui où (4) s' écrit sous forme conservative:

(5) $$\sum \partial_j F_j(y,u)=0$$

Alors $u \in L^\infty$ suffit à donner un sens à (5). En revanche, il est bien connu que, sous cette seule hypothèse, le théorème 2 est faux, même pour une équation scalaire d' ordre 1, avec n=1.(Equation de Burgers, par exemple).Il peut y avoir alors apparition de discontinuités pour u (phénomène de choc.) Il reste que l' on ignore si le théorème est vrai pour des solutions de (5) qui sont supposées a priori continues.

## 2. Esquisse des démonstrations.

a) Equations semi-linéaires.

Une convexification standard permet de se ramener au problème d' évolution suivant:

(6) $$Lu = f(t,x,u) + g \ ,$$

avec $u \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap L^2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u \subset ]0,T] \times \mathbb{R}^n$ ; $g \in H^s([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ ; f est $C^\infty$, bornée en x ainsi que ses dérivées, et vérifie $f(t,x,0) = 0$ ; L est strictement hyperbolique par rapport à t, et ses coefficients sont indépendants de x lorsque $|x|$ est assez grand.

Il s' agit de montrer que $u \in H^s([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ . Pour cela, il suffit de prouver que $u \in L^2(0,T; H^s(\mathbb{R}^n))$, la régularité en t se récupérant comme d' habitude grâce à l' équation. ( Rappelons que ,$\forall\, s > 0$, $L^\infty \cap H^s$ est stable par les opérations non linéaires , voir [7] ).

Posons $\rho_\varepsilon = (1+\varepsilon\Lambda^s)^{-1}$, avec $\Lambda^s = (-\Delta_x)^{s/2}$; rappelons que $\rho_\varepsilon$ est une famille bornée d' opérateurs d' ordre 0, convergeant fortement vers l' identité, et que $\varepsilon\rho_\varepsilon$ est une famille bornée d' opérateurs d' ordre $-s$. Posons $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon u$; il s' agit de borner, quand $\varepsilon \to 0$, la quantité: $\|u_\varepsilon\|_s = (\int_0^T |u_\varepsilon(t)|_s^2\, dt)^{1/2}$, $|\ \ |_s$ désignant la norme $H^s(\mathbb{R}^n)$. On utilise pour cela l' inégalité d' énergie classique: ( voir par exemple [2] )

*Lemme 1*: pour $s \in \mathbb{R}$, il existe $C>0$, $\gamma_s>0$, tels que:

$\forall\, \gamma \geq \gamma_s$, $\forall\, v \in L^2(0,T;H^s(\mathbb{R}^n))$ vérifiant $Lv \in L^2(0,T;H^s(\mathbb{R}^n))$, $v(0)=0$:

(7) $$\gamma\, \|e^{-\gamma t} v\|_s \leq C\, \|e^{-\gamma t} Lv\|_s$$

Appliquant (7) à $v=u_\varepsilon$, et écrivant :

$Lu_\varepsilon = [L,\rho_\varepsilon]\, u + \rho_\varepsilon f(t,x,u) + \rho_\varepsilon g = -\varepsilon\rho_\varepsilon[L,\Lambda^s]\, u_\varepsilon + \rho_\varepsilon f(t,x,u) + \rho_\varepsilon g,$

on est ramené à une estimation du type :

(8) $\qquad |\rho_\varepsilon f(t,x,u)|_s \leqslant C\, |\rho_\varepsilon u(t)|_s.$ (où t ne joue qu' un rôle de paramètre)

ou encore :

(8)' $\qquad |\rho_\varepsilon f(x,v)|_s \leqslant C\, |\rho_\varepsilon v|_s$, pour $v \in L^\infty \cap L^2$.

L' inégalité (8)' est vraie si $s \in ]0,1]$ ( c' est essentiellement la remarque (ii) ), ce qui permet d' achever la démonstration dans ce cas. Nous ignorons si (8)' est vraie ou non lorsque $s > 1$. Mais dans ce cas on sait déjà que la solution $u \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$. Il suffit donc d' étudier $\|\rho'_\varepsilon u\|_s$ avec : $\rho'_\varepsilon = (1+\varepsilon\Lambda^{s-1})^{-1}$, et donc de prouver l' analogue (8)'' de (8)' pour cette régularisation. On utilise un théorème de linéarisation dû à Y. Meyer [7] , fondé sur les décompositions dyadiques:

*Lemme 2*: Soit $f=f(x,v) \in C^\infty$, bornée en x ainsi que ses dérivées, et telle que $f(x,0)=0$. Soit $v=v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe un opérateur B, borné sur tous les $H^r$ pour $r > 0$ , tel que:

(9) $\qquad f(.,v) = Bv + w, \qquad$ avec $w \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$, $|w|_\sigma \leqslant C|v|_0\ \forall\, \sigma \in \mathbb{R}$.

Si $v \in L^\infty \cap H^1$, on a, en posant $v_\varepsilon = \rho'_\varepsilon v$:

$|\rho'_\varepsilon Bv|_s = |\rho'_\varepsilon B(1+\varepsilon\Lambda^{s-1})v_\varepsilon|_s \leqslant C(\, |Bv_\varepsilon|_s + |B\Lambda^{s-1}v_\varepsilon|_1\, ) \leqslant C(\, |v_\varepsilon|_s + |\Lambda^{s-1}v_\varepsilon|_1).$

L' inégalité (8)'' en découle. Notons qu' intervient ci-dessus de façon cruciale la continuité $H^1$ de B. L' utilisation de $\rho_\varepsilon$ au lieu de $\rho'_\varepsilon$ aurait fait intervenir de même la continuité $L^2$ de B, qui, elle, est fausse en général. ( voir [7] ).

b) Equations quasi-linéaires.

On suit le même plan qu' au a). Pour cela, il est nécessaire de linéariser la partie principale de l' équation (4), de sorte que l' opérateur linéaire obtenu soit contenu dans un calcul symbolique. Un tel problème est résolu par la "paralinéarisation" introduite par J.-M. Bony dans [1]. La version du calcul paradifférentiel que nous utilisons ici regroupe les opérateurs pseudodifférentiels classiques et les "paramultiplications" par des fonctions lipschitziennes, opérateurs que l' on peut définir à l' aide des décompositions dyadiques. On obtient ainsi un calcul symbolique principal, ce qui est suffisant pour démontrer une inégalité d' énergie hyperbolique comme au lemme 1.

Le traitement du terme $A_j(t,x,u)\partial_j u$ se fait à l' aide du lemme suivant:

*Lemme 3:* Soient $a \in Lip(\mathbb{R}^n)$, et $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe un opérateur B borné sur $H^r(\mathbb{R}^n)$ pour tout $r > 0$, tel que :

(10) $\quad av = T_a v + Ba$, où $T_a$ désigne le paraproduit par a.

Les lemme 2 et 3 nous ramènent alors au problème suivant:

(11) $$Lu = Ku + g,$$

$L = \partial_t - \Sigma\, T_{A_j}\partial_j u$ vérifie le lemme 1; $u \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$, $\text{supp}\, u \subset ]0,T]\times \mathbb{R}^n$; $K=K(t)$ est une famille $L^\infty$ d' opérateurs bornés sur $H^r$ pour tout $r > 0$, et $g \in L^2(0,T;H^s(\mathbb{R}^n))$.

On montre alors que $u \in L^2(0,T; H^s(\mathbb{R}^n))$ en estimant $\rho'_\varepsilon u$ comme au a).

## Bibliographie:

[1] J.-M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations non linéaires, Ann. Scient. E.N.S., 14, 1981, pp. 209-246.

[2] J. Chazarain, A. Piriou : Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires, Gauthier-Villars, 1981.

[3] R. Coifman, Y. Meyer : Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque, vol. 57, 1978.

[4] B.E. Dahlberg : A note on Sobolev spaces, in Harmonic Analysis in Euclidean spaces, Proc. Symp. in Pure Mathematics (A.M.S.) , Vol. 35, Part1, 1979, pp.183-185.

[5] P. Gérard, J. Rauch : Article à paraître.

[6] A. Majda : Compressible fluid flows and systems of conservation laws in several variables, Applied Mathematical Sciences 53, Springer, 1984.

[7] Y. Meyer : Remarque sur un théorème de J.-M. Bony, Suppl. ai Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, Atti del Seminario di Analisi Armonica, Pisa, Serie 2, n° 1, 1981.