

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-LUC JOLY

JEFF RAUCH

## Ondes oscillantes semi-linéaires en 1.d

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1986), p. 1-20

<[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1986\\_\\_\\_\\_A11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A11_0)>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ONDES OSCILLANTES SEMI-LINEAIRES EN 1.d.

par

J.L. JOLY (Université de Bordeaux I)

J. RAUCH \* (University of Michigan)

---

Nous nous intéressons dans ce papier aux ondes oscillantes semi-linéaires à haute fréquence et d'amplitude non négligeable. L'étude y est limitée à la dimension 1 d'espace où il est possible de donner une première description de l'interaction. Le passage aux dimensions supérieures est comme pour les singularités, plus délicat ; il est abordé dans [3] et [4].

La première chose à dire concernant les oscillations est que, contrairement à ce qui se passe pour les singularités, une interaction entre plusieurs ondes n'engendre pas systématiquement de nouvelles oscillations : pour qu'il y ait création d'ondes oscillantes il faut que soit vérifiée sur les phases des ondes qui se rencontrent une condition qu'on appelle résonance. Or, cette condition est telle qu'on peut dire que génériquement il n'y a jamais création d'oscillations. Ceci dit, le phénomène de résonance garde tout son intérêt ne serait-ce que : 1°) par ses conséquences sur le comportement qualitatif des ondes semi-linéaires

---

\* Research partially supported by the National Science Foundation under grant MCS-8301061.

associées à un opérateur donné ; 2°) par la distinction qu'il opère entre les opérateurs linéaires selon l'optique semi-linéaire qu'ils engendrent.

Le phénomène de résonance est fondamentalement relié à la géométrie du tissu formé par les feuilletages caractéristiques de l'opérateur. Des résultats classiques de la géométrie des tissus ont des applications intéressantes dans l'étude des oscillations.

L'étude des ondes oscillantes semi-linéaires et de la résonance commence avec le travail de L. Tartar [6] sur les systèmes de Carleman et de Broadwell. Le cas des opérateurs à coefficients constants et des oscillations à phases linéaires en dimension 1 d'espace est fait dans [2]. Le passage aux dimensions supérieures pour l'étude du cas non résonnant ou des petites oscillations est fait dans [3] [4].

## I - Fonction oscillante.

### 1.1 - Description des phases.

Les phases qui interviennent pour définir les oscillations dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  sont supposées appartenir à un  $\mathbb{Z}$  module de fonctions réelles sur  $\Omega$ , de type fini qu'on note  $S$ .

On fait sur  $S$  les hypothèses suivantes :

- i)  $S \subset C^\infty(\Omega ; \mathbb{R})$
- (S) ii) quel que soit  $\varphi$  dans  $S \setminus \{0\}$ ,  $d\varphi$  ne s'annule jamais dans  $\Omega$ .

S étant sans torsion est isomorphe algébriquement à  $Z^\sigma$ , où  $\sigma$  est le rang de S. On notera  $\varphi_\alpha$ ,  $\alpha \in Z^\sigma$  l'élément générique de S écrit dans une base donnée de S.

Remarque : Si  $\Omega$  est connexe,  $\varphi \rightarrow d\varphi$  est injective sur S grâce à  $\mathcal{P}$  ii). De même, pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\varphi \rightarrow d\varphi(x)$  est un isomorphisme de S sur un sous-module de  $\mathbb{R}^2$ .

On appelle S-polynôme, toute famille  $p = (p(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  avec :

$$(1) \quad p(\varepsilon) = \sum_{\alpha \text{ fini}} a_\alpha e^{\frac{1}{\varepsilon} \varphi_\alpha}, \quad a_\alpha \in C^0(\bar{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega).$$

Les coefficients  $a_\alpha$  dans (1) sont définis de manière unique.

En effet, par un argument de densité et le lemme de la phase non stationnaire, on vérifie facilement que  $e^{-\frac{1}{\varepsilon} \varphi_\alpha} p(\varepsilon)$  converge faiblement vers  $a_\alpha$  dans  $L^\infty(\Omega)$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0, grâce à la propriété  $\mathcal{P}$  ii).

### 1.2 - Fonction oscillante.

Définition 1.1 - On appelle fonction S-oscillante, toute famille  $u = (u(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  telle que pour tout  $\delta > 0$ , il existe un S-polynôme  $p^\delta$  et un réel  $\varepsilon(\delta) > 0$  vérifiant :

$$(2) \quad \forall \varepsilon < \varepsilon(\delta) \quad \|u(\varepsilon) - p^\delta(\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} < \delta.$$

Notons que la famille  $(u(\varepsilon))$  est nécessairement bornée dans  $L^\infty(\Omega)$ .

Proposition 1.1 - L'ensemble des fonctions S-oscillantes forme une algèbre sur  $\mathbb{C}$  contenue dans  $L^\infty(\Omega)$ , stable par conjugaison et qui contient les S-polynômes. A toute fonction  $u$  S-oscillante, on peut faire correspondre une unique suite :

$$(a_\alpha) \in (C^0(\bar{\Omega}))^{\mathbb{Z}^\sigma}$$

telle que toute suite  $p^\delta$  d'approximations polynomiales de  $u$  vérifiant (2) soit telle que :

$$(3) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^\sigma, \quad a_\alpha^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} a_\alpha \quad \text{dans } C^0(\bar{\Omega}).$$

Preuve : La propriété d'algèbre est évidente, le produit de deux suites de  $\delta$  approximations polynomiales fournissant une  $\delta$  approximation polynomiale du produit.

L'existence des  $(a_\alpha)$  vérifiant (3) résulte de la remarque que si  $u$  est S-oscillante  $u(\varepsilon)$  converge faiblement dans  $L^\infty(\Omega)$  ; cette propriété a déjà été utilisée si  $u$  est un S-polynôme, et en découle dans le cas général grâce à (2).

On définit alors  $a_\alpha$  comme la limite de  $e^{-\frac{1}{\delta} \alpha} u(\varepsilon)$  dans  $L^\infty(\Omega)^*$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 ; à cause de (2), on a :

$$|a_\alpha - a_\alpha^\delta| < \delta.$$

Remarque : 1) Nous utiliserons la notation :

$$u(\varepsilon) \sim \sum_{\alpha} a_\alpha e^{-\frac{1}{\delta} \alpha},$$

la série (formelle !) étant appelée le profil de  $u(\varepsilon)$ . Il serait intéressant de savoir sous quelles conditions cette série est associée à une fonction (le profil de  $u$  dans [2])

$$u(x, y_1, \dots, y_\sigma)$$

$(2\pi)^\sigma$  périodique en  $y=(y_1, \dots, y_\sigma)$  dont les coefficients de Fourier soient justement les  $a_\alpha$  :

$$u(\cdot, y) \sim \sum_{\alpha} a_{\alpha} e^{iy \cdot \alpha} .$$

2) Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux sous-modules de  $S$ , si  $u_1$  est  $S_1$ -oscillante,  $u_1 \cdot u_2$  et plus généralement  $f(u_1, u_2)$  ( $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ) est  $S_1 + S_2$  oscillante.

### 1.3 - Spectre et support oscillant.

**Définition 1.2** - Le spectre oscillant d'une fonction  $S$ -oscillante  $u$

$$u(\varepsilon) \sim \sum_{\alpha} a_{\alpha} e^{\frac{i\varepsilon}{\varepsilon} \alpha}$$

est l'ensemble :

$$OS(u) = \{(x, d\varphi_{\alpha}(x)) ; \text{il existe } \alpha \neq 0, x \in \text{supp} a_{\alpha}\} .$$

Le support oscillant de  $u$  est l'ensemble  $SOS(u) = \bigcup_{\alpha} \text{supp} a_{\alpha}$  ; on notera  $OS_{\mathbb{Z}}(u)$  le  $\mathbb{Z}$  module engendré par  $OS(u)$  privé de  $\Omega \times \{0\}$ .

Les ensembles  $OS(u)$  ou  $OS_Z(u)$  ne sont pas fermés dans  $T^*(\Omega) \setminus (0)$  puisqu'en particulier dès que  $\sigma > 2$ ,  $dS(x)$  est dense dans  $\mathbb{R}^2$ .

Proposition 1.2 - Soit  $p^\epsilon$  une approximation polynomiale de  $u$ . On a :

$$OS(u) \subset \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} (OS p^\epsilon),$$

la limite inférieure étant définie avec la topologie habituelle de  $T^*(\Omega) \setminus (0)$ .

## II - Ondes oscillantes semi-linéaires.

### II.1 - Hypothèses.

Soit  $L(x, \partial)$  un opérateur différentiel hyperbolique du premier ordre homogène,  $N$  diagonal, à coefficient  $C^\infty$

$$L(x, \partial) = \text{diag}(X_j ; j=1, \dots, N)$$

avec

$$X_j = a_{0j} \partial_0 + a_{1j} \partial_1, \quad a_{0j}(x) \neq 0.$$

$X_j$  désignant dans la suite aussi bien le champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  que l'opérateur différentiel associé ; on suppose  $L$  strictement hyperbolique, c'est-à-dire les champs  $X_j$  deux à deux indépendants en tout point.

On s'intéresse au problème de Cauchy local :

$$(1) \quad \begin{aligned} Lu(\varepsilon) &= f(x, u(\varepsilon)) \\ u(\varepsilon) - v(\varepsilon) &= 0 \\ &\quad |_{x_0=0} \end{aligned}$$

où  $v = (v(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  est donnée oscillante dans un sens qui est précisé plus loin et vérifie :

$$(2) \quad Lv(\varepsilon) = 0 .$$

On suppose que  $f(x, u)$  est une application de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^N$  dans  $\mathbb{C}^N$  polynomiale en  $u$  telle que  $f(x, 0) = 0$  .

Nous allons faire des hypothèses de régularité sur les phases des ondes oscillantes linéaires qui composent  $v(\varepsilon)$ .

Soit  $P$  un  $\mathbb{Z}$  module (de type fini) vérifiant (P) au voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^2$  et tel que de plus :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{quel que soit } k=1, \dots, N \text{ et } \varphi \text{ dans } P, \{X_k \varphi = 0\} \\ \text{est, soit vide, soit égal à } \Omega \text{ tout entier.} \end{array} \right.$$

Noter que si, par exemple, les phases appartenant à  $P$  sont linéaires et  $L$  à coefficients constants, les propriétés (P) et (3) sont vérifiées dans  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

On pose :

$$P_k = \{\varphi \in P ; X_k \varphi = 0 \text{ dans } \Omega\} , k=1, \dots, N$$

$$\mathbb{D} = P_1 \times \dots \times P_k .$$



On suppose que les phases des oscillations de la donnée de Cauchy  $v(\varepsilon)$  appartiennent à un  $\mathbb{Z}$  module  $\mathcal{S} = S_1 \times \dots \times S_N$  où chaque module  $S_j$  est inclus dans  $P$  de sorte que  $S_j$  mais aussi  $\sum_j S_j$  vérifient  $(\mathcal{P})$ . On en déduit que si  $v(\varepsilon)$  est  $\mathcal{S}$ -oscillante,  $f(x, v(\varepsilon))$  est  $P_x \dots_x P$ -oscillante.

Remarquons enfin, qu'à cause de (2), chaque  $S_j$  est inclus dans  $P_j$ .

*11.2 - La solution est oscillante.*

**Théorème 11.1** - On suppose la donnée de Cauchy  $\mathcal{S}$ -oscillante au voisinage d'un point de  $x_0 = 0$ . Il existe un voisinage  $\Omega$  (éventuellement plus petit) du même point sur lequel la solution  $u(\varepsilon)$  de (1) est  $\mathcal{S}^\infty$ -oscillante où  $\mathcal{S}^\infty$  est un  $\mathbb{Z}$  module défini plus loin qui vérifie :

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^\infty \subset \mathbb{D}.$$

**Définition 11.1** - Soit  $j \in \{1, \dots, N\}$  et  $I$  un sous-ensemble non vide de  $\{1, \dots, N\}$  tel que  $j \notin I$ . On dit que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in P$  est une  $(I, j)$ résonance si :

4.1  $I = \{k \neq j ; \varphi_k \neq 0\}$

4.2  $\sum_k \varphi_k \in P_j$  (i.e.  $\sum_k d\varphi_k \in \text{Car} X_j$ ).

L'entier  $|I|$  s'appelle l'ordre de la résonance. Lorsqu'on ne précise pas l'ensemble  $I$ , on parle seulement de  $j$  résonance.

**Remarque :** L'ordre d'une résonance est toujours supérieur ou égal à 2 (avec l'hypothèse de stricte hyperbolicité de  $L$ ).

**Définition II.2** - On dit qu'un monôme  $e_j f_{j,n}(x) \cdot u^n$  est  $\$$ -résonnant s'il existe une  $(I, j)$  résonance des  $\$$  compatible avec le monôme, c'est-à-dire telle que :

$$I \subset \{k ; n_k \neq 0\} .$$

Une application  $f(x, u) = \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ n \in \mathbb{N} \text{ (ou } \mathbb{Z}^N)}} e_j f_{j,n}(x) u^n$  est  $\$$ -résonnante si elle contient un monôme  $\$$ -résonnant.

**Corollaire :** Si dans (1)  $f$  n'est pas  $\$$ -résonnant, alors  $\$^* = \$$ .

**Remarque :** Le corollaire précédent s'applique au système de Carleman [6] et plus généralement aux systèmes à deux vitesses pour lesquels il n'existe évidemment jamais de couplage  $f$  résonnant. Il apparaîtra au III où on étudiera les propriétés des résonances, qu'il existe des systèmes  $L$  à plus de deux vitesses pour lesquels il n'existe pas de résonance.

### II.3 - Démonstrations.

#### Démonstration du théorème II.1.

On utilise les itérés de la méthode de Picard, définis

par :

$$u^1(\varepsilon) = v(\varepsilon)$$

et pour  $\nu > 1$ ,

$$(5) \quad \begin{aligned} Lu^{\nu+1}(\varepsilon) &= f(x, u^\nu(\varepsilon)) \\ u^{\nu+1}(\varepsilon) - v(\varepsilon) &= 0 \quad \Big|_{x_0=0} \end{aligned}$$

On suppose  $v(\varepsilon)$   $\$$ -oscillante sur un ouvert  $\Omega'$  (contenant 0) et bornée par  $M$ .

1<sup>ère</sup> étape : a - On vérifie d'abord qu'il existe un ouvert trapézoïdal  $\Omega$  contenu dans  $\Omega'$  et contenant 0 tel que, pour tout  $\delta > 0$ , on peut trouver  $\nu(\delta)$  tel que :

$$\forall \nu > \nu(\delta), \forall \varepsilon > 0, \|u(\varepsilon) - u^\nu(\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M.$$

Cet ouvert  $\Omega$  dépend de  $M, \Omega, L, f$  mais pas de  $\varepsilon > 0$ .

b - L'application  $v(\varepsilon) \rightarrow u(\varepsilon)$  est continue dans  $L^\infty(\Omega)$ , uniformément par rapport à  $\varepsilon > 0$  et  $v(\varepsilon)$  vérifiant  $\|v(\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ .

2<sup>ème</sup> étape : A cause de la première étape, on est ramené à l'étude des problèmes linéaires (5) avec  $v(\varepsilon)$   $\$$ -polynôme.

Lemme : La suite  $u^\nu(\varepsilon)$  est  $\$^\nu$ -oscillante de profil polynomial avec  $\$ = \$^1 \subset \$^\nu \subset \mathbb{D}$ .

Preuve du lemme : Pour tout  $j=1, \dots, N$  :

$$u_j^{\nu+1}(\varepsilon) = v_j(\varepsilon) + X_j^{-1}(f_j(x, u^\nu(\varepsilon)))$$

avec 
$$f_j(x, u) = \sum_{n \text{ fini}} f_{jn}(x) u^n.$$

Chaque intégrale  $X_j^{-1}(f_{j,n}(u^v(\epsilon))^n)(x)$  est une somme finie d'intégrales oscillantes de la forme :

$$(6) \quad X_j^{-1}\left(a e^{\frac{i}{\epsilon}(\varphi_1 + \dots + \varphi_N)}\right)(x)$$

où  $a$  est continue,  $\varphi_k \in S_k^v$  si  $n_k \neq 0$  et  $\varphi_k = 0$  si  $n_k = 0$ . Les points critiques de la phase sont solutions de :

$$X_j(\varphi_1 + \dots + \varphi_N) = 0$$

et situés sur  $\Gamma_j^-(x)$ . A cause de la propriété (3) ou bien il n'y a aucun point critique quel que soit  $x \in \Omega$ , ou bien  $\Gamma_j^-(x)$  est critique quel que soit  $x$  dans  $\Omega$ .

Dans le premier cas, l'intégrale considérée comme fonction de sa borne supérieure tend vers 0 dans  $L^\infty(\Omega)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Dans le second cas, l'intégrale s'écrit :

$$e^{\frac{i}{\epsilon}(\varphi_1 + \dots + \varphi_N)} X_j^{-1}(a) .$$

Par conséquent (6) définit une fonction oscillante de profil nul si  $\varphi_1 + \dots + \varphi_N \notin P_j$  ou de profil  $e^{\frac{i}{\epsilon}(\varphi_1 + \dots + \varphi_N)} X_j^{-1}(a)$  lorsque  $\varphi_1 + \dots + \varphi_N \in P_j$ .

Notons  $\mathfrak{A}_j((\$^v)^n) = \{\varphi \in P_j ; \varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_N, \varphi_k \in S_k^v, \varphi_k = 0 \text{ si } n_k = 0\}$ .

On a donc vérifié que  $u_j^{v+1}(\epsilon)$  et  $S_j^{v+1}$  oscillante de profil polynomial avec :

$$S_j^{v+1} = S_j + \sum_{n, f_{j,n} \neq 0} \mathfrak{A}_j((\$^v)^n) .$$

Ecrivons symboliquement le passage de  $\mathcal{S}^\nu$  à  $\mathcal{S}^{\nu+1}$  :

$$\mathcal{S}^{\nu+1} = \mathcal{S} + \mathcal{K}(f\mathcal{S}^\nu) .$$

On vérifie facilement que  $\mathcal{K}(f(.))$  est croissante, ce qui prouve que  $\mathcal{S}^\nu$  est croissante. On pose  $\mathcal{S}^\infty = \bigcup_{\nu} \mathcal{S}^\nu$  (réunion finie en fait) ; la proposition 1.2 achève la preuve.

Démonstration du corollaire : Si  $f$  n'est pas résonnant, on a  $\mathcal{K}(f(\mathcal{S})) = \mathcal{S}$  et par conséquent  $\mathcal{S}^\nu = \mathcal{S}$  pour tout  $\nu$ .

Remarque : Les phases nouvelles, i.e. appartenant à  $\mathcal{S}^\infty \setminus \mathcal{S}$ , qui apparaissent dans les oscillations de  $u(\epsilon)$  sont dues au phénomène de résonance.

#### 11.4 - Interaction des oscillations.

Les propriétés oscillatoires de l'onde  $u(\epsilon)$  peuvent être précisées en étudiant le support oscillant de  $u(\epsilon)$  qui dépend de façon fondamentale des résonances. Faisons l'hypothèse que les données de Cauchy sont oscillantes par morceaux, c'est-à-dire que le support oscillant de  $v(\epsilon)$  est contenu dans une réunion de tubes caractéristiques d'avenir issus d'un nombre fini d'intervalles fermés (nécessairement non réduits à un point) de  $x_0=0$ . Appelons cet ensemble  $\Sigma^1$  et appliquons lui le procédé utilisé par J. Rauch et M. Reed [5] pour étudier le support singu-

lier des ondes semi-linéaires. On rajoute à  $\Sigma^1$  toutes les courbes caractéristiques d'avenir  $\Gamma_j^+(x)$  issues de  $x \in \Sigma^1$  et correspondant à des  $\$$ -résonances de type  $(l, j)$ -compatibles avec un monôme (résonnant) de  $f$  et vérifiant :

$$\Gamma_i^-(x) \subset \Sigma^1, \quad \forall i \in I.$$

L'ensemble obtenu, noté  $\Sigma^2$  est encore une réunion finie de tubes caractéristiques d'avenir. On continue le processus, ce qui définit une suite croissante  $(\Sigma^v)$  ; on pose  $\Sigma^\infty = \bigcup_v \Sigma^v$ .

L'ensemble  $\Sigma^\infty$  est fermé et réunion d'un nombre fini de tubes caractéristiques et de cônes d'avenir pleins ; on le voit assez facilement en reprenant les arguments de [5].

**Théorème 11.2** - On suppose  $v(\epsilon)$   $\$$ -oscillante avec un support oscillant contenu dans l'ensemble  $\Sigma^1$  précédent. Le support oscillant de  $u(\epsilon)$  est alors contenu dans  $\Sigma^\infty$ .

**Corollaire** - Si  $f$  n'est pas  $\$$ -résonnant,  $\Sigma^\infty = \Sigma^1$ .

Autrement dit, il n'y a pas d'interaction entre les oscillations des divers modes de  $u(\epsilon)$  ; à part la création d'harmoniques, les oscillations de chaque mode se propagent comme dans le cas linéaire.

**Démonstration** : Elle résulte des arguments de la deuxième étape de la démonstration du théorème 1, qui prouvent, puisque  $\Sigma^\infty \supset \Sigma^v$ , que  $\Sigma^v$  contient le support oscillant de  $u^v(\epsilon)$ . D'après la proposition 1.2, le support oscillant de  $u(\epsilon)$  est contenu dans la limite inférieure du support oscillant des  $u^v(\epsilon)$ , qui est elle-même contenue dans  $\Sigma^\infty$  puisque cet ensemble est fermé.

**III - Résonance et géométrie du tissu caractéristique.**

*III.1 - Finitude de l'espace des phases résonnantes.*

Il est clair que  $(\psi_1, \dots, \psi_N) \in P$  est une  $j$ -résonance si et seulement si  $(\psi_1, \dots, 0, \dots, \psi_N) \in P$  est une  $j$ -résonance, puisque  $\psi_j \in P_j$  vérifie  $X_j \psi_j = 0$ . La  $j^{\text{ème}}$  composante d'une  $j$ -résonance est donc sans importance. On peut écrire la propriété de résonance sous une forme plus symétrique. Posons  $\varphi_k = \psi_k$  si  $k \neq 0$  et  $\varphi_j = -\sum_k \psi_k$ ; les phases  $\varphi_k \in P$  sont alors des solutions dans  $\Omega$  de :

$$X_k \varphi_k = 0$$

$$\sum_k \varphi_k = 0 .$$

Comme  $P$  vérifie  $\mathcal{P}$ , on sait (remarque 1.1) que si  $\Omega$  est connexe, les  $\varphi_k \in P$  sont de façon équivalente des solutions de :

$$(1) \quad \begin{cases} 1.1 & X_k \varphi_k = 0 \\ 1.2 & \sum_k d\varphi_k = 0 \end{cases}$$

puisque  $P \cap \{ \text{constante} \} \subset \{ 0 \}$ .

Sous la forme (1) les équations de la résonance ne particularisent plus l'indice  $j$ , et se présentent sous la forme d'un système de  $N+2$  équations homogènes à  $N$  inconnues.

On note  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{R}_{(1, \dots, N)}$  l'ensemble de ses solutions (modulo les fonctions constantes).

L'ensemble  $\mathcal{K}$ , précisément la collection des  $\{\mathcal{K}_K\}_{K \subset \{1, \dots, N\}}$ , caractérise l'optique géométrique des ondes oscillantes semi-linéaires à haute fréquence associées à l'opérateur  $L(x, \partial)$ .

Par exemple on aura des optiques analogues à celles des singularités pour tous les opérateurs tels que :

$$\forall K \subset \{1, \dots, N\}, |K|=3, \mathcal{K}_K \neq \{0\}$$

c'est-à-dire pour les opérateurs dont tous les modes pris 2 à 2 sont susceptibles de résonance.

La structure de  $\mathcal{K}$  est clairement de nature géométrique : elle ne dépend que de l'ensemble des feuilletages caractéristiques et est invariante par changement de variable et permutation sur le champs. Seront donc considérés comme équivalents deux opérateurs ayant les mêmes variétés caractéristiques.

En fait l'objet  $\mathcal{K}$  est très connu en géométrie des tissus (Web theory) : l'ensemble  $\mathcal{K}$  est isomorphe (en tant qu'espace vectoriel réel) à l'ensemble des relations abéliennes sur le tissu caractéristique de l'opérateur  $L(x, \partial)$ .

Le tissu caractéristique -terminologie de Blaschke et Bol [1] est le  $N$ -uple des feuilletages caractéristiques  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  (en position générale car  $L(x, \partial)$  est strictement hyperbolique).



Soit  $\theta_k \in C^\infty(\Omega)$ , réelle, définissant  $\Gamma_k \dots$  Tout N-uple de fonctions  $f_k$  d'une seule variable de classe  $C^\infty$  vérifiant :

$$(2) \quad \sum_k f_k(\theta_k) d\theta_k = 0$$

s'appelle une relation abélienne sur le tissu.

Le lien avec (1) est clair : (1.1) équivaut à  $\theta_k = F_k(\theta_k)$  et (1.2) à  $\sum F'_k(\theta_k) d\theta_k = 0$ . Les formulations (1) et (2) étant équivalentes, nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre dans la suite.

Proposition III.1 - Le système (1) est elliptique.

Preuve : Le symbole du système :

$$\left[ \begin{array}{cc} \langle X_1(x), \xi \rangle & \\ & \langle X_N, \xi \rangle \\ \xi_0 \dots & \xi_0 \\ \xi_1 \dots & \xi_1 \end{array} \right]$$

est injectif pour  $\xi \neq 0$ , puisque tout  $u \in \mathbb{C}^N$  dans le noyau du symbole vérifie, à cause des deux dernières lignes :

$$\sum u_k = 0$$

et que la stricte hyperbolicité de  $L$  entraîne qu'au plus un seul des nombres  $\langle X_k(x), \xi \rangle$  est nul, donc qu'au plus un des  $u_k$  est non nul.

**Corollaire :** Si les feuilletages sont  $C^\infty$  (resp.  $C^m$ ) , les phases résonantes sont  $C^\infty$  (resp.  $C^m$ ).

Supposons les  $X_k$  analytiques réels. Le calcul précédent reste valable avec  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$  remplacé par  $\xi \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$  , qui prouve que la variété caractéristique complexe (au sens de la théorie des systèmes) est égale à  $\Omega \setminus \{0\}$ . On en déduit que l'ensemble des solutions (analytiques réelles) de (1) est de dimension finie. En fait, ce résultat suivant est classique en géométrie des tissus, et attribué à Poincaré.

**Proposition III.2** [1] - Supposons les champs  $X_k$  analytiques,  $k=1, \dots, N$  . Alors :

$$\dim \mathcal{R} < \frac{(N-1)(N-2)}{2} .$$

L'exemple des opérateurs à coefficients constants est instructif et montre en particulier que la borne est optimale. Supposons  $a_{0k}=1$  ,  $a_{1k}=\lambda_k \in \mathbb{R}$  pour tout  $k=1, \dots, N$  . On choisit comme d'habitude  $\theta_k(x) = x_1 - \lambda_k x_0$  . On a :

$$\varphi_k = F_k(\theta_k) .$$

Les champs  $X_k$  commutent ; de (1) on déduit que :

$$X_1 \dots X_{j-1} X_{j+1} \dots X_N (\sum \varphi_k) = 0 .$$

donc

$$(\lambda_j - \lambda_1) \dots (\lambda_j - \lambda_{j-1}) (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \dots (\lambda_j - \lambda_N) F_j^{N-1} = 0 .$$

Par conséquent les fonctions  $F_k$ , donc  $\varphi_k$ , sont des polynômes de degré  $N-2$  au plus.

Posons :

$$F_k(z) = \sum_{p \leq N-2} \alpha_{kp} z^p .$$

De (1.2) ou (2) on déduit les relations :

$\mathfrak{R}^{(2)}$	$\left. \begin{aligned} \sum_k \alpha_{k1} &= 0 \\ \sum_k \alpha_{k1} \lambda_k &= 0 \end{aligned} \right\}$	Résonances d'ordre 2 (dim=N-2)
$\mathfrak{R}^{(3)} / \mathfrak{R}^{(2)}$	$\left. \begin{aligned} \sum_k \alpha_{k2} &= 0 \\ \sum_k \alpha_{k2} \lambda_k &= 0 \\ \sum_k \alpha_{k2} \lambda_k^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$	Résonances d'ordre 3 qui ne sont pas combinaisons de résonances d'ordre 2 (dim=N-3)
$\mathfrak{R}^{(N-1)} / \mathfrak{R}^{(N-2)}$	$\left. \begin{aligned} \sum_k \alpha_{k, N-2} &= 0 \\ \sum_k \alpha_{k, N-2} \lambda_k &= 0 \\ \vdots & \\ \sum_k \alpha_{k, N-2} \lambda_k^{N-2} &= 0 \end{aligned} \right\}$	Résonances d'ordre N-1 qui ne sont pas combinaisons de résonances d'ordre inférieur (dim=1)

On a donc  $\dim(\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}^{(2)} \oplus \mathfrak{R}^{(3)} / \mathfrak{R}^{(2)} \dots \oplus \mathfrak{R}^{(N-1)} / \mathfrak{R}^{(N-2)}) = 1+2+\dots+N-2 = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$ .

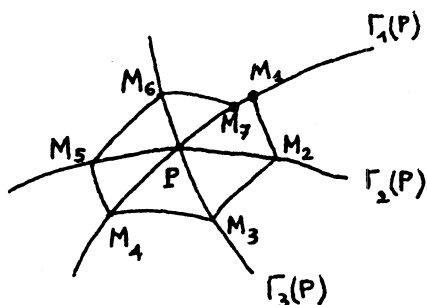
Les opérateurs  $L(x, \partial)$  équivalents à un opérateur à coefficients constants (via un difféomorphisme) admettent donc des

résonances de tous les ordres. Admettant en particulier toutes les résonances d'ordre 2, ils engendrent des optiques géométriques semi-linéaires analogues à celles des singularités.

*III.2 - Résonances d'ordre 2.*

Il existe une caractérisation très simple des champs de vecteurs donnant lieu à des résonances d'ordre 2 : c'est la propriété classique de fermeture hexagonale.

Une telle résonance fait intervenir trois champs donc un trois-tissu et la figure type suivante formée avec des courbes



appartenant aux trois-tissu.

On dit que le trois-tissu possède la propriété de fermeture hexagonale si on a toujours  $M_1=M_7$ .

**Proposition** [1] - Soit  $L$  un système strictement hyperbolique  $3 \times 3$  à coefficients  $C^\infty$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) il existe des résonances d'ordre 2 ;
- ii) le tissu caractéristique possède la propriété de fermeture hexagonale ;
- iii) l'opérateur  $L$  est équivalent à un opérateur à coefficients constants.

Plus de détails et d'autres exemples seront donnés dans [4].

**B I B L I O G R A P H I E**

- [1] W. Blaschke et G. Bol. - Geometrie der Gewebe. Topologische Fragen der Differential Geometrie, Grundlehren der Math. Wiss, Springer (1938).
- [2] J.L. Joly. - Sur la propagation des oscillations par un système hyperbolique semi-linéaire en dimension 1 d'espace, C.R. Acad. Sc. Paris, t.296 (1983).
- [3] J.L. Joly et J. Rauch. - High frequency semi-linear oscillations, Congrès pour le 60<sup>e</sup> anniversaire de P. Lax, Berkeley (1986).
- [4] J.L. Joly et J. Rauch. - En préparation.
- [5] J. Rauch et M. Reed. - Jump discontinuities of semi-linear strictly hyperbolic systems in two variables, creation and propagation, Commun. Math. Phys. 81, 203-227 (1981).
- [6] L. Tartar. - Solutions oscillantes des équations de Carleman, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz (1980-1981).

o-o-o-o