JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LAMBERTO CATTABRIGA
DANIELA MARI
LUISA ZANGHIRATI

Opérateurs intégraux de Fourier d'ordre infini sur les espaces de Gevrey. Applications au problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques

Journées Équations aux dérivées partielles, nº 1 (1985), p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985___1_A3_0>

CONFERENCE N° III

OPERATEURS INTEGRAUX DE FOURIER D'ORDRE INFINI

SUR LES ESPACES DE GEVREY

APPLICATIONS AU PROBLEME DE CAUCHY

POUR DES OPERATEURS HYPERBOLIQUES

PAR

L. CATTABRIGA - D. MARI - L. ZANGHIRATI -

Dans cet exposé on donne des règles de calcul et des propriétés pour des opérateurs intégraux de Fourier avec amplitude d'ordre infini, opérant sur des espaces de fonctions ou d'ultradistributions du type de Gevrey. A l'aide de ces opérateurs on peut construire une paramétrix avec noyau ultradistribution pour le problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à charactéristiques de multiplicité constante avec données dans des espaces de fonctions ou d'ultradistributions Gevrey et obtenir des résultats sur la propagation des singularités par rapport aux espaces de Gevrey pour la solution de ce problème. Ici on se borne à montrer cela dans un cas particulier. Dans le cas général, les résultats de ce type ont été obtenus par des méthodes différentes par S. Mizohata [11] et K. Taniguchi [13]. Le calcul pour les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre infini sur les espaces de Gevrey a été développé par L. Zanghirati [16]. Des applications de ce calcul au problème de la propagation des singularités et au problème de Cauchy ont été données dans [12] et [5].

1 - SYMBOLES D'ORDRE INFINI ET INTEGRALES OSCILLANTES -

DEFINITION 1.1

Soit X un ouvert de R^{ν} et $\sigma > 1$. On dénote par $S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ l'ensemble de toutes les fonctions $a \in C^{\infty}(X \times R^N)$ à valeurs complexes telles que pour tout compact $\tilde{K}$ de X il existe $A,B > 0$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$

$$(1.1) \qquad \| a \|^{A,B}_{\tilde{K},\varepsilon} = \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^N_+ \\ \beta \in \mathbb{Z}^{\nu}_+}} \sup_{\substack{x \in \tilde{K} \\ |\xi| \geq B|\alpha|^{\sigma}}} A^{-|\alpha|-|\beta|} \alpha!^{-1} \beta!^{-\sigma} |D^{\alpha}_{\xi} D^{\beta}_{x} a(x,\xi)| (1+|\xi|)^{|\alpha|} \exp(-\varepsilon |\xi|^{1/\sigma}) < +\infty.$$

On dénote par $S^{\infty,\sigma}(X \times R^N;\tilde{K},A,B,\varepsilon)$ le sous-ensemble des $a \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ tel que $\|a\|^{A,B}_{\tilde{K},\varepsilon} < +\infty$ et par $S^{\infty,\sigma}(X \times R^N;\tilde{K},A,B)$ l'intersection par rapport à $\varepsilon > 0$ de toutes les $S^{\infty,\sigma}(X \times R^N;\tilde{K},A,B,\varepsilon)$, muni de la topologie limite projective pour $\varepsilon \to 0$ par rapport aux normes (1.1). On munit $S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ de la topologie induite par la limite projective pour $\tilde{K} \to X$ de la limite inductive pour $A,B \to +\infty$ des espaces $S^{\infty,\sigma}(X \times R^N;\tilde{K},A,B)$.

REMARQUE 1.2

On peut montrer que si $a_k \in C^\infty(X \times R^N)$ est une suite bornée dans $S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ et dans $C^\infty(X \times R^N)$ qui converge ponctuellement sur $X \times R^N$ vers une fonction $a \in C^\infty(X \times R^N)$, alors a_k converge vers la même limite dans $S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ (1).

Pour développer le calcul avec les opérateurs qui nous intéressent il est nécessaire d'introduire les notions de série formelle de symboles et d'équivalence entre deux séries formelles (2).

DEFINITION 1.3

On dénote par $SF^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ l'espace de toutes les séries $\sum_{j\geq 0} a_j(x,\xi)$, où les $a_j \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ sont telles que pour tout compact $\tilde{K}$ de X il existe deux constantes positives A,B telles que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}_+}\ \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^N_+\\ \beta\in\mathbb{Z}^\nu_+}}\ \sup_{\substack{x\in\tilde{K}\\ |\xi|\geq(j+|\alpha|)^\sigma}} \frac{A^{-|\alpha|-|\beta|-j}\alpha!^{-1}(\beta!j!)^{-\sigma}|D^\alpha_\xi D^\beta_x a_j(x,\xi)|}{(1+|\xi|)^{|\alpha|+j}\exp(-\varepsilon|\xi|^{1/\sigma})} < +\infty$$

---

(1) - L'ensemble des symboles $S^{\infty,\sigma}$ a été introduit dans [16]. Les symboles analogues d'ordre fini ont été étudié par F. Trèves [14], G. Métivier [10], P. Bolley-J.Camus-G.Métivier [2] dans le cas $\sigma = 1$ et dans le cas $\sigma > 1$ par S. Hashimoto-T.Matsuzawa-Y.Morimoto [6] et avec méthodes differentes par L. Boutet de Monvel-P.Kiée [4], L.R. Volevic [15] et V. Iftimie [7]. Opérateurs pseudo-differentiels analytiques d'ordre infini ont été étudié par L. Boutet de Monvel [3] et T. Aoki [1].

(2) - Voir [16]

DEFINITION 1.4

Deux séries $\sum_{j\geq 0} a_j$, $\sum_{j\geq 0} b_j$ dans $SF^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ sont dites équivalentes ($\sum_{j\geq 0} a_j \sim \sum_{j\geq 0} b_j$) si pour tout compact $\tilde{K}$ de X il existe deux constantes positives A et B telles que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N \\ \beta\in\mathbb{Z}_+^\nu}} \sup_{\substack{x\in\tilde{K} \\ |\xi|\geq B(j+|\alpha|)^\sigma}} A^{-|\alpha|-|\beta|-s}\alpha!^{-1}(\beta!s!)^{-\sigma}|D_\xi^\alpha D_x^\beta(\sum_{j<s}[a_j(x,\xi)-b_j(x,\xi)]|(1+|\xi|)^{|\alpha|+s}\exp(-\varepsilon|\xi|^{1/\sigma}) < +\infty$$

Comme dans [16] on montre le

THEOREME 1.5

Pour tout $\sum_{j\geq 0} a_j \in SF^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ il existe $a \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ tel que $a \sim \sum_{j\geq 0} a_j$.

Si Ω est un ouvert de R^n, on dénote par $G^{(\sigma),A}(K)$, $A > 0$, K compact de Ω, l'espace de Banach de toutes les fonctions $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ telle que

$$||\varphi||_{K,A} = \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \sup_{x\in K} A^{-|\alpha|} \alpha!^{-\sigma}|D_x^\alpha\varphi(x)| < +\infty$$

et on définit

$$G^{(\sigma)}(K) = \varinjlim_{A\to+\infty} G^{(\sigma),A}(K) \ , \ G^{(\sigma)}(\Omega) = \varprojlim_{K\subset\Omega} G^{(\sigma)}(K)$$

$$G_o^{(\sigma)}(\Omega) = \varinjlim_{K\to\Omega} \varinjlim_{A\to+\infty} G^{(\sigma),A}(K) \cap C_o^\infty(K).$$

$G^{(\sigma)'}(\Omega)$ et $G_o^{(\sigma)'}(\Omega)$ dénoteront les espaces d'ultratributions duaux des espaces $G^{(\sigma)}(\Omega)$ et $G_o^{(\sigma)}(\Omega)$ respectivement.

Soit $\phi \in C^\infty(X \times R^N)$ une fonction réelle, homogène de degré un par rapport à ξ si $|\xi| \geq B_\phi > 0$ et soit $\phi \in S^{1,\sigma}(X \times R^N)$ c'est à dire tel que pour tout compact $\tilde{K} \subset X$ il existe des constantes C_ϕ, $A_\phi > 0$ telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^\nu$

(1.2) $$|D_\xi^\alpha D_x^\beta \phi(x,\xi)| \leq C_\phi\, A_\phi^{|\alpha|+|\beta|}\, \alpha!\, \beta!^\sigma (1+|\xi|)^{1-|\alpha|}$$

si $x \in \tilde{K}$, $\xi \in R^N$. On suppose en plus que

(1.3) $$\nabla_{x,\xi}\phi(x,\xi) \neq 0 \text{ pour } (x,\xi) \in X \times \{|\xi| \geqslant B_\phi\}.$$

On appellera une telle fonction ϕ <u>une fonction de phase</u>.

La condition (1.3) permet de définir l'opérateur

(1.4) $$L = \sum_{j=1}^{N} a_j\, \partial_{\xi_j} + \sum_{n=1}^{\nu} b_n\, \partial_{x_n} + c$$

où $a_j = i|\xi|^2 d\partial_{\xi_j}\phi$, $b_n = id\partial_{x_n}\phi$, $c = \sum_{j=1}^{N} \partial_{\xi_j} a_j + \sum_{n=1}^{\nu} \partial_{x_n} b_n$

(1.5) $$d = [|\xi|^2 \sum_{j=1}^{N} (\partial_{\xi_j}\phi)^2 + \sum_{n=1}^{\nu} (\partial_{x_j}\phi)^2]^{-1}$$

et ses itérés $L^k = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant k} \ell_{\alpha,\beta}^{(k)}(x,\xi) D_x^\beta D_\xi^\alpha$.

On prouve que pour tout compact $\tilde{K}$ de X il existe deux constantes positives L_ϕ et A_ϕ telles que

$$|D_\xi^\gamma D_x^\delta \ell_{\alpha,\beta}^{(k)}(x,\xi)| \leqslant L_\phi^k\, A_\phi^{k+|\gamma|+|\delta|} (k-|\alpha|-|\beta|+|\gamma|+|\delta|)!^\sigma |\xi|^{-(k-|\alpha|+|\gamma|)}$$

si $x \in \tilde{K}$, $|\xi| \geqslant B_\phi$.

Pour donner un sens à l'intégrale oscillante

$$I_\phi(au) = \text{Os} - \iint e^{i\phi(x,\xi)} a(x,\xi) u(x) dx d\xi \ , \ d\xi = (2\Pi)^{-N} d\xi \ ,$$

pour $a \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ et $u \in G_0^{(\sigma)}(X)$, on considère une suite de fonctions $g_i \in C_0^\infty(R^N)$ telles que

$$g_j(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| \leqslant 2 \ , \ g_j(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geqslant 3 \ ,$$

$$|D^\alpha g_j(\xi)| \leqslant (C_j)^{|\alpha|} \text{ si } |\alpha| \leqslant j$$

et on définit la partition de l'unité[3].

(1.6) $\Psi_o(\xi) = g_1(\xi/R)$, $\Psi_j(\xi) = g_{j+1}(\xi/R(j+1)^\sigma) - g_j(\xi/R_j^{\ \sigma})$,

où R est une constante positive qu'on choisira ci-dessous.

Si $a \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ et $u \in G_o^{(\sigma)}(X)$ on définit alors

$$(1.7) \qquad I_\phi(au) = Os - \iint e^{i\phi(x,\xi)}\ a(x,\xi)\ u(x)\ dx\ d\xi =$$

$$= \sum_{j\geqslant o} \iint e^{i\phi(x,\xi)}\ a(x,\xi)\ \Psi_j(\xi)\ u(x)\ dx\ d\xi = \sum_{j\geqslant o} I_j(au)$$

après avoir choisi R de façon que la série

$$\sum_{j\geqslant o} |I_j(au)| = \sum_{j\geqslant o} \left|\iint e^{i\phi(x,\xi)} L^j(a(x,\xi)\Psi_j(\xi)u(x))dxd\xi\right|$$

soit convergente. D'après cette définition on prouve la

PROPOSITION 1.6

Si $u \in G_o^{(\sigma),A_u}(\tilde{K})$, $a \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N;\tilde{K},A_a,B_a)$ et ϕ est une fonction de phase, alors il existe ε, $C > 0$ dépendantes seulement de $\tilde{K},A_a,B_a,A_u,\phi$ telles que

$$|I_\phi(au)| \leqslant C||a||_{\tilde{K},\varepsilon}^{A_a,B_a}||u||_{\tilde{K},A_u}$$

En plus, si ϕ_ν est une suite de fonctions de phase bornée dans $S^{1,\sigma}(X \times R^N)$, convergente à la fonction de phase ϕ sur $X \times R^N$ et telle que les fonctions d définies par (1.5) sont uniformément bornées sur $\tilde{K} \times \{|\ \xi| \geqslant B_\phi\}$ avec B indépendant de ν, alors $I_{\phi_\nu}(au) \to I_\phi(au)$.

On prouve aussi la

PROPOSITION 1.7

Si $u \in G_o^{(\sigma),A_u}(\tilde{K})$, $a \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N;\tilde{K},A_a,B_a,\varepsilon)$ et $\nabla_x\phi(x,\xi) \neq 0$

(3) Voir [14], [10], [2], [6].

pour $(x,\xi) \in \tilde{K} \times \{|\xi| \geqslant B_\phi\}$, alors il existe $c > 0$ dépendant seulement de A_a, A_u, ϕ tel que pour $\xi \in R^N$

$$\left|\int e^{i\phi(x,\xi)} a(x,\xi)u(x)dx\right| \leqslant ||a||^{A_a,B_a}_{\tilde{K},\varepsilon} ||u||_{\tilde{K},A_u} \exp((\varepsilon-c)|\xi|^{1/\sigma}).$$

Une remarque analogue à celle de la proposition 1.1 est aussi valable, si les fonctions $|\nabla_x \phi_\nu|^{-1}$ sont uniformément bornées sur $\tilde{K} \times \{|\xi| \geqslant B_\phi\}$.

En utilisant cette proposition on voit que si $a \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N;\tilde{K},A_a,B_a)$ on peut choisir $\varepsilon \in]0,C[$ et donc qu'on a

$$I_\phi(au) = \int d\xi \int e^{i\phi(x,\xi)}\ a(x,\xi)\ u(x)dx.$$

Si $\nabla_\xi \phi(x,\xi) \neq 0$ pour $|\xi| \geqslant B_\phi$ on peut définir d'une façon analogue à (1.7) l'intégrale oscillante

$$I_\phi(a)(x) = \mathrm{Os} - \int e^{i\phi(x,\xi)}\ a(x,\xi)d\xi\ ,\ a \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)\ ,\ x \in X$$

et prouver la

PROPOSITION 1.8

Si $X_\phi = \{x \in X\ ;\ \nabla_\xi \phi(x,\xi) \neq 0\ ,\ |\xi| \geqslant B_\phi\}$, alors pour tout compact $\tilde{K}$ de X_ϕ et tout $a \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N;\tilde{K},A_a,B_a)$, il existe ε, $C > 0$ dépendantes seulement de $\tilde{K},A_a,B_a,\phi$ telles que pour tout $x \in \tilde{K}$

$$|I_\phi(a)(x)| \leqslant C||a||^{A_a,B_a}_{\tilde{K},\varepsilon}$$

On en déduit que si $u \in G_0^{(\sigma)}(X_\phi)$ et $a \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ on a

$$I_\phi(au) = \int I_\phi(a)(x)u(x)dx.$$

2 - OPERATEURS INTEGRAUX DE FOURIER D'ORDRE INFINI

Soit maintenant $X = \Omega \times \Omega$, Ω ouvert de R^n, $a \in S^{\infty,\sigma}(X \times R^N)$ et soit $\varphi \in S^{1,\sigma}(X \times R^N)$ une fonction de phase par rapport à (y,ξ) pour tout $x \in \Omega$ et donc telle que

$$\nabla_{y,\xi}\varphi(x,y,\xi) \neq 0 \text{ pour } (x,y,\xi) \in \Omega \times \Omega \times \{|\xi| \geqslant B_\varphi\}.$$

Pour $u \in G_o^{(\sigma)}(\Omega)$ on définit

$$(Au)(x) = Os - \iint e^{i\varphi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi)u(y)dy\, d\xi \quad , \; x \in \Omega \tag{2.1}$$

En s'appuyant sur la proposition 1.7 on prouve que si $\nabla_y\varphi(x,y,\xi) \neq 0$ pour $(x,y,\xi) \in \Omega \times \tilde{K} \times \{|\xi| \geqslant B_\varphi\}$ on a

$$(Au)(x) = \int d\xi \int e^{i\varphi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi)u(y)dy \quad , \quad x \in \Omega^{(4)}$$

A l'aide de la proposiiton 1.6 et de la remarque 1.2 on prouve aussi la

PROPOSITION 2.1

Si $a \in S^{\infty,\sigma}(\Omega \times \Omega \times R^N)$ et $\varphi \in S^{1,\sigma}(\Omega \times \Omega \times R^N)$ est une fonction de phase par rapport à (y,ξ), alors (2.1) définit une application linéaire et continue de $G_o^{(\sigma)}(\Omega)$ à $G^{(\sigma)}(\Omega)$.

De même, si φ est aussi une fonction de phase par rapport à (x,ξ), la transposée ${}^tA$ dans A donnée par

$$({}^tAv)(y) = Os - \iint e^{i\varphi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi)v(x)dxd\xi \;, \; v \in G_o^{(\sigma)}(\Omega)$$

définit une application linéaire et continue de $G_o^{(\sigma)}(\Omega)$ à $G^{(\sigma)}(\Omega)$. On en déduit que

---

(4) Le cas $\phi(x,y,\xi) = \langle x-y,\xi\rangle$ est étudié dans [16].

THEOREME 2.2

Si $a \in S^{\infty,\sigma}(\Omega \times \Omega \times R^N)$ et $\varphi \in S^{1,\sigma}(\Omega \times \Omega \times R^N)$ est une fonction de phase par rapport à (y,ξ) et à (x,ξ), alors l'application $u \to Au$ de $G_o^{(\sigma)}(\Omega)$ à $G^{(\sigma)}(\Omega)$ définit par

$$\langle Au,v\rangle = Os - \iiint e^{i\varphi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi)v(x)u(y)dxdyd\xi \ ,$$

$u \in G_o^{(\sigma)}(\Omega)$, $v \in G_o^{(\sigma)}(\Omega)$ se prolonge en une application linéaire et continue de $G^{(\sigma)'}(\Omega)$ à $G_o^{(\sigma)'}(\Omega)$ dont le noyau est donné par l'ultradistribution $K_A \in G_o^{(\sigma)'}(\Omega \times \Omega)$ définit par

$$K_A(w) = Os - \iiint e^{i\varphi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi)w(x,y)dxdyd\xi \ , \ w \in G_o^{(\sigma)}(\Omega \times \Omega). \tag{2.2}$$

Si

$$R_\varphi = \{(x,y) \in \Omega \times \Omega \ ; \ \nabla_\xi \varphi(x,y,\xi) \neq 0 \text{ pour } |\xi| \geq B_\phi\} \tag{2.3}$$

des arguments analogues à ceux qui prouvent la proposition 2.1 quand on considère x et y comme paramètres, montrent que l'intégrale oscillante

$$I_\phi(a)(x,y) = Os - \int e^{i\varphi(x,y,\xi)} a(x,y,\xi)d\xi \ , \quad (x,y) \in R_\varphi \ ,$$

définit une fonction de $G^{(\sigma)}(R_\varphi)$ égale à la restriction de K_A à R_φ.

Si en particulier $R_\varphi = \Omega \times \Omega$, alors $K_A \in G^{(\sigma)}(\Omega \times \Omega)$ et $Au \in G^{(\sigma)}(\Omega)$ pour tout $u \in G^{(\sigma)'}(\Omega)$.

On est conduit ainsi au

THEOREME 2.3

Si φ satisfait aux hypothèses du théorème 2.2, alors pour chaque $u \in G^{(\sigma)'}(\Omega)$ et $a \in S^{\infty,\sigma}(\Omega \times \Omega \times R^N)$

$$\sigma - \text{sing supp } Au \subset C_\varphi \circ \sigma - \text{sing supp } u =$$

$$= \{x \in \Omega \ ; \ \exists \ y \in \sigma - \text{sing supp } u, (x,y) \in C_\varphi\} \ ,$$

où $C_\varphi = C R_\varphi$, R_φ est défini par (2.3) et σ-sing supp Au dénote le plus petit fermé de Ω en dehors duquel Au $\in G^{(\sigma)}$.

Le calcul avec les opérateurs du type (2.1) sera obtenu aux opérateurs près qu'on appelle σ-régularisant d'après la

DEFINITION 2.4

On dit qu'un opérateur linéaire et continu de $G_o^{(\sigma)}(\Omega)$ à $G^{(\sigma)}(\Omega)$ est σ-régularisant si, il se prolonge en un opérateur linéaire et continu de $G^{(\sigma)'}(\Omega)$ à $G^{(\sigma)}(\Omega)$. On prouve que

PROPOSITION 2.5

Si $p \in S^{\infty,\sigma}(\Omega \times R^n)$ et $p \sim 0$ dans $SF^{\infty,\sigma}(\Omega \times R^n)$, alors l'opérateur (2.1) avec $a(x,y,\xi) = p(x,\xi)$ est σ-régularisant.

Dans la suite nous serons intéressé au cas ou $n = N$ et $\varphi(x,y,\xi) = \phi(x,\xi) - \langle y,\xi\rangle$ où ϕ appartient à l'ensemble $\mathcal{P}$ défini par la

DEFINITION 2.6 (5)

On dénote par $\mathcal{P}$ l'ensemble de toutes les fonctions $\phi \in S^{1,\sigma}(\Omega \times R^n)$ à valeurs réelles, homogènes de degré un par rapport à ξ si $|\xi|$ est suffisamment grand et tel que pour tout compact K de Ω

$$\sum_{|\alpha+\beta|\leq 2} \sup_{(x,\xi)\in K\times R^n} \{|D_\xi^\alpha D_x^\beta[\phi(x,\xi)-\langle x,\xi\rangle]|/(1+|\xi|)^{1-|\alpha|}\{ \leq \tau_K$$

pour une constante $\tau_K \in [0,1[$.

On voit immédiatement que tous les $\varphi = \phi(x,\xi) - \langle y,\xi\rangle$ avec $\phi \subset \mathcal{P}$ satisfont aux hypothèses des théorèmes 2.2 et 2.3.

(5) Voir Kumano-go [9].

Entre les règles de composition d'opérateurs du type (2.1) donnons ici la suivante.

THEOREME 2.7

Soient P_1, P_2 opérateurs du type (2.1) avec $\varphi(x-y,\xi)$ donné par $<x-y,\xi>$ et $\phi(x,\xi) - <y,\xi>$, $\phi \in \mathcal{P}$, respectivement et soit $a(x,y,\xi) = p_i(x, \ )$, $p_i \in S^{\infty,\sigma}(\Omega \times R^n)$, $i = 1,2$. On suppose que l'opérateur P_1 soit propre[6] et que pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe deux constantes positives A_1, B_1 telles que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n} \ \sup_{\substack{x\in K \\ |\xi|\geqslant B_1}} A_1^{-|\alpha+\beta|}\alpha!^{-1}\beta!^{-\sigma}|D_\xi^\alpha D_x^\beta p_1(x,\xi)|(1+|\xi|)^{|\alpha|}\exp(-\varepsilon|\xi|^{1/\sigma}) < +\infty.$$

Alors $\quad P_1 P_2 = Q + R$

où R est un opérateur σ-régularisant et Q est défini par

$$(2.4) \qquad (Qu)(x) = \mathrm{Os} - \iint e^{i\phi(x,\xi)-<y,\xi>} q(x,\xi)u(y)dyd\xi$$

où $\quad q(x,\xi) \sim \sum_{j\geqslant 0} q_j(x,\xi)$,

avec $\quad q_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \alpha!^{-1} D_y^\alpha[\partial_\xi^\alpha p_1(x,\tilde{\nabla}_x\phi(x,y,\xi))\, p_2(y,\xi)]_{y=x}$

Ici $\quad \tilde{\nabla}_x\phi(x,y,\xi) = \int_0^1 \nabla_x\phi(y+\theta(x-y),\xi)d\theta.$

Si $u \in G^{(\sigma)'}(\Omega)$ et U est un ouvert convexe relativement compact de Ω tel que supp $u \subset U$, il existe $u_0 \in C_0(\bar{U})$ et un opérateur ultradifférentiable $P(D)$ tel que $P(D)u_0 = u$[7]. En utilisant cette propriété ainsi que l'opérateur (1.4) avec $\phi(x,\xi) - <y,\xi> - <x,\theta>$ au lieu de $\phi(x,\xi)$ et la partition de l'unité (1.6), on prouve pour le front d'onde $WF^{(\sigma)}(Au)$ de Au par rapport à l'espace $G^{(\sigma)}$, le même résultat que dans le cas des opérateurs d'ordre fini [8], c'est à dire le

(6) C'est à dire tel que si K_{P_1} est sont noyau, supp $K_{P_1} \cap (K\times\Omega)$ et supp $K_{P_1} \cap (\Omega\times K)$ sont compactes dans $\Omega\times\Omega$ quelque soit le compact K de Ω.
(7) Voir H. Komatsu [8].
(8) Voir K. Taniguchi [13].

THEOREME 2.8

Si A est l'opérateur défini par (2.1) où $\varphi = \phi(x,\xi) - \langle y,\xi\rangle$, $\phi \in \mathcal{P}$ alors pour tout $u \in G^{(\sigma)'}(\Omega)$

$$WF^{(\sigma)}(Au) \subset \{(x,\rho\nabla_x(x,\xi)) \ ; \ (\nabla_\xi\phi(x,\xi),\xi) \in WF^{(\sigma)}(\Omega) \ , \quad \text{pour } |\xi| \text{ grand}, \ \rho > 0\}.$$

On dénotera par $OPS^{\infty,\sigma}(\Omega)$ l'ensemble des opérateurs du type (2.1) tels que $\varphi(x,y,\xi) = \langle x-y,\xi\rangle$ et $a(x,y,\xi) = a(x,\xi) \in S^{\infty,\sigma}(\Omega \times R^n)$, c'est à dire le cas des opérateurs pseudo-différentiels.

3 - CONSTRUCTION D'UNE PARAMETRIX POUR LE PROBLEME DE CAUCHY

En s'appuyant sur les résultats des numéros précédents nous allons représenter sous la forme d'un opérateur du type (2.1) une paramétrix pour le problème de Cauchy

$$(3.1) \quad \begin{cases} P(t,x,D_t,D_x)u(x,t) = f(x,t) & (x,t) \in \Omega \times]0,T[\\ D_t^k u(o,x) = g_j(x) & x \in \Omega, \ k = 0,\dots,m-1 \ , \end{cases}$$

pour l'opérateur hyperbolique d'ordre m

$$P(t,x,D_t,D_x) = D_t^m + \sum_{j=o}^{m-1} a_j(t,x,D_x)D_t^j \ ,$$

où $a_j(t,x,D_x)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $p(m-j)$, $p \in]0,1[$, sur l'ouvert Ω de R^n. On suppose que pour $\sigma \in]1,1/p[$ donné les fonctions $t \to a_j(t,x,\xi)$, ainsi que toutes les dérivées par rapport à t, sont bornées dans $S^{p(m-j),\sigma}(\Omega \times R^n)$ pour $t \in [0,T]$, c'est à dire que pour tout $h \in \mathbb{Z}_+$ et tout compact K de Ω il existe des constantes $A,B > 0$ telles que

$$\sup_{t\in[0,T]}\ \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n}\ \sup_{|\xi|\geq\beta|\alpha|^\sigma}\ \sup_{\substack{x\in K\\ t\in[0,T]}} A^{-|\alpha+\beta|}\alpha!^{-1}\beta!^{-\sigma}(1+|\xi|)^{-p(m-j)+|\alpha|}\,|D_t^h D_\xi^\alpha D_x^\beta a_j(t,x,\xi)| < +\infty$$

On suppose en plus que les opérateurs a_j sont propres et que $f \in C^\infty([0,T]\ ;\ G^{(\sigma)'}(\Omega))$, $g_j \in G^{(\sigma)'}(\Omega)$, $j = 0,\dots,m-1$.

Pour chaque $s,t, 0 \leq s < t \leq T$, on cherche $E(t,s) \in OPS^{\infty,\sigma}(\Omega)$ tel que

i) Pour chaque $s \in [0,T[$ la fonction $t \to e(t,s;x,\xi)$, $t \in [S,T]$, à valeurs dans $S^{\infty,\sigma}(\Omega \times R^n)$ soit bornée ainsi que toutes ses dérivées par rapport à t jusqu'à l'ordre m et

ii)

$$(3.2)\qquad \begin{cases} P(t,x,D_t,D_x)E(t,s) = R(t,s),\ t \in [S,T] \\ D_t^j\ E(s,s) = 0 \qquad j = 0,\dots,m-2 \\ D_t^{m-1}\ E(s,s) = i\ I \end{cases}$$

où $R(t,s)$ est un opérateur σ-régularisant pour chaque s,t et I est l'opérateur identité. Si au lieu de $e(t,s;x,\xi)$ on cherche une série formelle $\sum_{h\geq 0} e_n(t,s;x,\xi)$ équivalent d'après la définition 1.4 à $e(t,s;x,\xi)$ pour chaque s,t, alors, comme conséquence du théorème 2.7, $P(t,x,D_t,D_x)E$ est égal à un opérateur σ-régularisant près, à un opérateur $Q(t,s) \in OPS^{\infty,\sigma}(\Omega)$ tel que $q(t,s,x,\xi) \sim \sum_{h>0} q_h(t,s;x,\xi)$

où
$$q_n(t,s;x,\xi) = D_t^m\, e_n(t,s;x,\xi) + \sum_{j=0}^{m-1}\ \sum_{|\alpha|+K=n} \alpha!^{-1}\partial_\xi^\alpha a_j(t,x,\xi) D_x^\alpha D_t^j e_n(t,s;x,\xi).$$

Pour la proposition 2.5, la première équation (3.2) sera alors satisfaite si on choisit $e_n(t,s;x,\xi)$ de façon que $q_n(t,s;x,\xi) \equiv 0$ pour $n = 0,1,\dots$ Les fonctions e_n doivent être alors solutions des problèmes

$$\begin{cases} \left(D_t^m + \sum_{j=o}^{m-1} a_j(t,x,\xi) D_t^j\right) e_o(t,s;x,\xi) = 0 & s \leqslant t \leqslant T \\ D_t^j \, e_o(s,s;x,\xi) = 0 & j = 0,\dots,m-2 \, , \\ D_t^{m-1} \, e_o(s,s;x,\xi) = i & \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \left(D_t^m + \sum_{j=o}^{m-1} a_j(t,x,\xi) D_t^j\right) e_n(t,s;x,\xi) = \\ \qquad = - \sum_{j=o}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{|\alpha|=\ell} \alpha!^{-1} \partial_\xi^\alpha a_j(t,x,\xi) D_x^\alpha D_t^j e_{n-\ell}(t,s;x,\xi) \\ D_t^j \, e_n(s,s;x,\xi) = 0 \qquad j = 0,\dots,m-1. \end{cases}$$

On prouve par induction que les fonctions e_n solutions de ces problèmes donnent lieu effectivement à une série $\sum_{n \geqslant o} e_n$ dans $SF^{\infty,\sigma}(\Omega \times R^n)$ et d'après le théorème 1.5 qu'il existe $e(t,s;x,\xi) \sim \sum_{n \geqslant o} e_n(t,s;x,\xi)$ tel que $E(t,s) \in OPS^{\infty,\sigma}(\Omega)$ et satisfait aux conditions i) et ii) ci-dessus.

D'autre part si $H(t,s) \in OPS^{\infty,\sigma}(\Omega)$ satisfait à i) et ii) quand P est remplacé par son transposé ${}^tP$, alors pour chaque s,t il existe $Q(t,s) \subset OPS^{\infty,\sigma}(\Omega)$ tel que ${}^tH(t,s) - Q(t,s)$ est un opérateur σ-régularisant ainsi que toutes ses dérivées à t jusqu'à l'ordre m[(9)]. On en déduit le

THEOREME 3.1

Pour chaque $s,t,o \leqslant s < t \leqslant T$, il existe $Q(t,s) \in OPS^{\infty,\sigma}(\Omega)$ tel que si $u \in C^m([0,T] \,;\, G^{(\sigma)'}(\Omega))$ et $D_t^j u(o,x) = 0$, $j = 0,\dots,m-1$, alors pour chaque $\varphi \in G_o^{(\sigma)}(\Omega)$

$$\langle u(t,.),\varphi\rangle = \int_o^t \langle Q(t,s)P(t,x,D_t,D_x)u(s,.),\varphi\rangle ds \, +$$

$$+ \int_o^t \langle R(t,s)u(s,.),\varphi\rangle \, ds \qquad t \in [0,T] \, ,$$

(9) Voir [16].

où R(t,s) est un opérateur σ-régularisant pour chaque s,t.

Une application du théorème 2.8 à $v(t,x) = u(t,x) - \sum_{j=o}^{m-1} t^j D_t^j u(o,x)$ donne alors le

<u>COROLLAIRE 3.2</u>

Si $u \in C^m([O,T] \; ; \; G^{(\sigma)'}(\Omega))$ et P satisfait aux conditions indiquées au début de ce numéro, alors pour chaque $t \in [O,T]$

$$WF^{(\sigma)}(u(t,.)) \subset \Big(\bigcup_{o \leq s \leq t} WF^{(\sigma)}(Pu(s,.)) \cup \Big(\bigcup_{j=o}^{m-1} WF^{(\sigma)}(D_t^j u(o,.)) \Big) \Big).$$

REFERENCES

[1] : T. AOKI - "Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini I". Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 33 (1983), 227-250.

[2] : P. BOLLEY - J. CAMUS - G. METIVIER : "Régularité Gevrey et itérés pour une classe d'opérateurs hypoelliptiques". Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino, numéro spécial 1983.

[3] : L. BOUTET DE MONVEL - "Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini". Ann. Inst. Fourier, Grenoble; 22 (1972), 229-268.

[4] : L. BOUTET DE MONVEL - P. KIEE - "Pseudo-différential operators and Gevrey classes". Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17 (1967); 295-323.

[5] : L. CATTABRIGA - "Costrurione di ma parametrice per il problema di Cauchy per certi operatori comporte principale iperbolica". Sem. di Analisi Matematica del Dipartimento di Matematica della Univ. di Bologna, 1984.

[6] : S. HASHIMOTO - T. MATSUZAWA - Y. MORIMOTO - "Opérateurs pseudo-différentiels et classes de Gevrey". Comm. in Partial Differential Equations, 8 (1983), 1277-1289.

[7] : V. IFTIMIE - "Opérateurs hypoelliptiques dans les espaces de Gevrey". Bull. Soc. Sc. Math. Roumanie, 27 (1983), 317-333.

[8] : H. KOMATSU - "Ultradistributions I structure theorems and a characterization". J. Fac. Sc. Univ. Tokyo Sect. IA Math, 20 (1973) 25-105.

[9] : H. KUMANO-GO - "Pseudo-differential operators". MIT Press, (1981).

[10] : G. METIVIER - "Analytic hypoellipticity for operators with multiple characteristics". Comm. in P.D.E. 6 (1981), 1-90.

[11] : S. MIZOHATA - "Propagation de la régularité au sens de Gevrey pour les opérateurs différentiels à multiplicité constante". J. Vaillant, Sém. E.D.P. hyperb. et holomorphes, Hermann, Paris, (1984).

[12] : L. RODINO - L. ZANGHIRATI - "Pseudo-differential operators with multiple characteristics and Gevrey singularities". A paraître.

[13] : K. TANIGUCHI - "Fourier integral operators in Gevrey class on R^n and the fundamental solution for a hyperbolic operator". Publ. RIMS, Kyoto Univ., 20 (1984), 491-542.

[14] : F. TREVES - "Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators". Vol. I, Plenum Press (1981).

[15] : L.R. VOLEVIC - "Pseudo-differential operators with holomorphic symbols and Gevrey classes". Trans. Moscow Math., Soc. 24 (1974), 43-72 = Trudy Moskov. Mat. Obss, 24 (1971), 43-68.

[16] : L. ZANGHIRATI - "Pseudo-differential operators of infinite order and Gevrey classes". A paraître.