

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LAMBERTO CATTABRIGA

DANIELA MARI

LUISA ZANGHIRATI

**Opérateurs intégraux de Fourier d'ordre infini sur les espaces de Gevrey.
Applications au problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques**

Journées Équations aux dérivées partielles, n° 1 (1985), p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985__1_A3_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPERATEURS INTEGRAUX DE FOURIER D'ORDRE INFINI

SUR LES ESPACES DE GEVREY

APPLICATIONS AU PROBLEME DE CAUCHY

POUR DES OPERATEURS HYPERBOLIQUES

PAR

L. CATTABRIGA - D. MARI - L. ZANGHIRATI -

Dans cet exposé on donne des règles de calcul et des propriétés pour des opérateurs intégraux de Fourier avec amplitude d'ordre infini, opérant sur des espaces de fonctions ou d'ultradistributions du type de Gevrey. A l'aide de ces opérateurs on peut construire une paramétrix avec noyau ultradistribution pour le problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante avec données dans des espaces de fonctions ou d'ultradistributions Gevrey et obtenir des résultats sur la propagation des singularités par rapport aux espaces de Gevrey pour la solution de ce problème. Ici on se borne à montrer cela dans un cas particulier. Dans le cas général, les résultats de ce type ont été obtenus par des méthodes différentes par S. Mizohata [11] et K. Taniguchi [13]. Le calcul pour les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre infini sur les espaces de Gevrey a été développé par L. Zanghirati [16]. Des applications de ce calcul au problème de la propagation des singularités et au problème de Cauchy ont été données dans [12] et [5].

1 - SYMBOLES D'ORDRE INFINI ET INTEGRALES OSCILLANTES -

DEFINITION 1.1

Soit X un ouvert de R^V et $\sigma > 1$. On dénote par $S^{\infty, \sigma}(X \times R^N)$ l'ensemble de toutes les fonctions $a \in C^\infty(X \times R^N)$ à valeurs complexes telles que pour tout compact \tilde{K} de X il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$

$$(1.1) \quad \|a\|_{\tilde{K}, \varepsilon}^{A, B} = \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N \\ \beta \in \mathbb{Z}_+^V \\ |\xi| \geq B|\alpha|^\sigma}} \sup_{x \in \tilde{K}} A^{-|\alpha| - |\beta|} \alpha!^{-1} \beta!^{-\sigma} |D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x, \xi)| \\ (1 + |\xi|)^{|\alpha|} \exp(-\varepsilon |\xi|^{1/\sigma}) < +\infty.$$

On dénote par $S^{\infty, \sigma}(X \times R^N; \tilde{K}, A, B, \epsilon)$ le sous-ensemble des $a \in S^{\infty, \sigma}(X \times R^N)$ tel que $\|a\|_{\tilde{K}, \epsilon}^{A, B} < +\infty$ et par $S^{\infty, \sigma}(X \times R^N; \tilde{K}, A, B)$ l'intersection par rapport à $\epsilon > 0$ de toutes les $S^{\infty, \sigma}(X \times R^N; \tilde{K}, A, B, \epsilon)$, muni de la topologie limite projective pour $\epsilon \rightarrow 0$ par rapport aux normes (1.1). On munit $S^{\infty, \sigma}(X \times R^N)$ de la topologie induite par la limite projective pour $\tilde{K} \rightarrow X$ de la limite inductive pour $A, B \rightarrow +\infty$ des espaces $S^{\infty, \sigma}(X \times R^N; \tilde{K}, A, B)$.

REMARQUE 1.2

On peut montrer que si $a_k \in C^\infty(X \times R^N)$ est une suite bornée dans $S^{\infty, \sigma}(X \times R^N)$ et dans $C^\infty(X \times R^N)$ qui converge ponctuellement sur $X \times R^N$ vers une fonction $a \in C^\infty(X \times R^N)$, alors a_k converge vers la même limite dans $S^{\infty, \sigma}(X \times R^N)$ (1).

Pour développer le calcul avec les opérateurs qui nous intéressent il est nécessaire d'introduire les notions de série formelle de symboles et d'équivalence entre deux séries formelles (2).

DEFINITION 1.3

On dénote par $SF^{\infty, \sigma}(X \times R^N)$ l'espace de toutes les séries $\sum_{j \geq 0} a_j(x, \xi)$, où les $a_j \in S^{\infty, \sigma}(X \times R^N)$ sont telles que pour tout compact \tilde{K} de X il existe deux constantes positives A, B telles que pour tout $\epsilon > 0$

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} \sup_{\substack{x \in \tilde{K} \\ |\xi| \geq (j + |\alpha|)^\sigma}} A^{-|\alpha| - |\beta| - j} \alpha!^{-1} (\beta! j!)^{-\sigma} |D_{\xi, x}^{\alpha, \beta} a_j(x, \xi)| (1 + |\xi|)^{|\alpha| + j} \exp(-\epsilon |\xi|^{1/\sigma}) < +\infty$$

(1) - L'ensemble des symboles $S^{\infty, \sigma}$ a été introduit dans [16]. Les symboles analogues d'ordre fini ont été étudié par F. Trèves [14], G. Métivier [10], P. Bolley-J. Camus-G. Métivier [2] dans le cas $\sigma = 1$ et dans le cas $\sigma > 1$ par S. Hashimoto-T. Matsuzawa-Y. Morimoto [6] et avec méthodes différentes par L. Boutet de Monvel-P. Kiée [4], L.R. Volevic [15] et V. Iftimie [7]. Opérateurs pseudo-différentiels analytiques d'ordre infini ont été étudié par L. Boutet de Monvel [3] et T. Aoki [1].

(2) - Voir [16]

DEFINITION 1.4

Deux séries $\sum_{j \geq 0} a_j$, $\sum_{j \geq 0} b_j$ dans $SF^{\infty, \sigma}(X \times R^N)$ sont dites équivalentes ($\sum_{j \geq 0} a_j \sim \sum_{j \geq 0} b_j$) si pour tout compact \tilde{K} de X il existe deux constantes positives A et B telles que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N \\ \beta \in \mathbb{Z}_+^N}} \sup_{\substack{x \in \tilde{K} \\ |\xi| \geq \beta(j + |\alpha|)^\sigma}} A^{-|\alpha| - |\beta| - s} \alpha!^{-1} (\beta! s!)^{-\sigma} |D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} (\sum_{j < s} [a_j(x, \xi) - b_j(x, \xi)] | (1 + |\xi|)^{|\alpha| + s} \exp(-\varepsilon |\xi|^{1/\sigma}) < +\infty$$

Comme dans [16] on montre le

THEOREME 1.5

Pour tout $\sum_{j \geq 0} a_j \in SF^{\infty, \sigma}(X \times R^N)$ il existe $a \in S^{\infty, \sigma}(X \times R^N)$ tel que $a \sim \sum_{j \geq 0} a_j$.

Si Ω est un ouvert de R^n , on dénote par $G^{(\sigma), A}(K)$, $A > 0$, K compact de Ω , l'espace de Banach de toutes les fonctions $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ telle que

$$\|\varphi\|_{K, A} = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \sup_{x \in K} A^{-|\alpha|} \alpha!^{-\sigma} |D_x^\alpha \varphi(x)| < +\infty$$

et on définit

$$G^{(\sigma)}(K) = \lim_{A \rightarrow +\infty} G^{(\sigma), A}(K), \quad G^{(\sigma)}(\Omega) = \lim_{K \subset \Omega} G^{(\sigma)}(K)$$

$$G_o^{(\sigma)}(\Omega) = \lim_{K \rightarrow \Omega} \lim_{A \rightarrow +\infty} G^{(\sigma), A}(K) \cap C_o^\infty(K).$$

$G^{(\sigma)' }(\Omega)$ et $G_o^{(\sigma)' }(\Omega)$ dénoteront les espaces d'ultratributions duaux des espaces $G^{(\sigma)}(\Omega)$ et $G_o^{(\sigma)}(\Omega)$ respectivement.

Soit $\phi \in C^\infty(X \times R^N)$ une fonction réelle, homogène de degré un par rapport à ξ si $|\xi| \geq B_\phi > 0$ et soit $\phi \in S^{1, \sigma}(X \times R^N)$ c'est à dire tel que pour tout compact $\tilde{K} \subset X$ il existe des constantes $C_\phi, A_\phi > 0$ telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$

$$(1.2) \quad |D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} \phi(x, \xi)| \leq c_{\phi} A_{\phi}^{|\alpha|+|\beta|} \alpha! \beta! (1+|\xi|)^{1-|\alpha|}$$

si $x \in \tilde{K}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$. On suppose en plus que

$$(1.3) \quad \nabla_{x, \xi} \phi(x, \xi) \neq 0 \text{ pour } (x, \xi) \in X \times \{|\xi| \geq B_{\phi}\}.$$

On appellera une telle fonction ϕ une fonction de phase.

La condition (1.3) permet de définir l'opérateur

$$(1.4) \quad L = \sum_{j=1}^N a_j \partial_{\xi_j} + \sum_{n=1}^V b_n \partial_{x_n} + c$$

$$\text{où } a_j = i|\xi|^2 d \partial_{\xi_j} \phi, \quad b_n = i d \partial_{x_n} \phi, \quad c = \sum_{j=1}^N \partial_{\xi_j} a_j + \sum_{n=1}^V \partial_{x_n} b_n$$

$$(1.5) \quad d = [|\xi|^2 \sum_{j=1}^N (\partial_{\xi_j} \phi)^2 + \sum_{n=1}^V (\partial_{x_n} \phi)^2]^{-1}$$

$$\text{et ses itérés } L^k = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \rho_{\alpha, \beta}^{(k)}(x, \xi) D_x^{\beta} D_{\xi}^{\alpha}$$

On prouve que pour tout compact \tilde{K} de X il existe deux constantes positives L_{ϕ} et A_{ϕ} telles que

$$|D_{\xi}^{\gamma} D_x^{\delta} \rho_{\alpha, \beta}^{(k)}(x, \xi)| \leq L_{\phi}^k A_{\phi}^{k+|\gamma|+|\delta|} (k-|\alpha|-|\beta|+|\gamma|+|\delta|)! \sigma |\xi|^{-(k-|\alpha|+|\gamma|)}$$

si $x \in \tilde{K}$, $|\xi| \geq B_{\phi}$.

Pour donner un sens à l'intégrale oscillante

$$I_{\phi}(au) = Os - \iint e^{i\phi(x, \xi)} a(x, \xi) u(x) dx d\xi, \quad d\xi = (2\pi)^{-N} d\xi,$$

pour $a \in S^{\sigma, \sigma}(X \times \mathbb{R}^N)$ et $u \in G_o^{(\sigma)}(X)$, on considère une suite de fonctions

$g_j \in C_o^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ telles que

$$g_j(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| \leq 2, \quad g_j(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq 3,$$

$$|D^{\alpha} g_j(\xi)| \leq (c_j)^{|\alpha|} \text{ si } |\alpha| \leq j$$

et on définit la partition de l'unité⁽³⁾.

$$(1.6) \quad \Psi_0(\xi) = g_1(\xi/R) \quad , \quad \Psi_j(\xi) = g_{j+1}(\xi/R(j+1)^\sigma) - g_j(\xi/R_j^\sigma) \quad ,$$

où R est une constante positive qu'on choisira ci-dessous.

Si $a \in S^{\infty, \sigma}(X \times \mathbb{R}^N)$ et $u \in G_0^{(\sigma)}(X)$ on définit alors

$$(1.7) \quad I_\phi(au) = 0s - \iint e^{i\phi(x, \xi)} a(x, \xi) u(x) dx d\xi = \\ = \sum_{j \geq 0} \iint e^{i\phi(x, \xi)} a(x, \xi) \Psi_j(\xi) u(x) dx d\xi = \sum_{j \geq 0} I_j(au)$$

après avoir choisi R de façon que la série

$$\sum_{j \geq 0} |I_j(au)| = \sum_{j \geq 0} \left| \iint e^{i\phi(x, \xi)} L^j(a(x, \xi) \Psi_j(\xi) u(x)) dx d\xi \right|$$

soit convergente. D'après cette définition on prouve la

PROPOSITION 1.6

Si $u \in G_0^{(\sigma), A_u}(\tilde{K})$, $a \in S^{\infty, \sigma}(X \times \mathbb{R}^N; \tilde{K}, A_a, B_a)$ et ϕ est une fonction de phase, alors il existe $\epsilon, C > 0$ dépendantes seulement de $\tilde{K}, A_a, B_a, A_u, \phi$ telles que

$$|I_\phi(au)| \leq C \|a\|_{\tilde{K}, \epsilon}^{A_a, B_a} \|u\|_{\tilde{K}, A_u}$$

En plus, si ϕ_ν est une suite de fonctions de phase bornée dans $S^{1, \sigma}(X \times \mathbb{R}^N)$, convergente à la fonction de phase ϕ sur $X \times \mathbb{R}^N$ et telle que les fonctions d définies par (1.5) sont uniformément bornées sur $\tilde{K} \times \{|\xi| \geq B_\phi\}$ avec B indépendant de ν , alors $I_{\phi_\nu}(au) \rightarrow I_\phi(au)$.

On prouve aussi la

PROPOSITION 1.7

Si $u \in G_0^{(\sigma), A_u}(\tilde{K})$, $a \in S^{\infty, \sigma}(X \times \mathbb{R}^N; \tilde{K}, A_a, B_a, \epsilon)$ et $\nabla_x \phi(x, \xi) \neq 0$

(3) Voir [14], [10], [2], [6].

pour $(x, \xi) \in \tilde{K} \times \{|\xi| \geq B_\phi\}$, alors il existe $c > 0$ dépendant seulement de A_a, A_u, ϕ tel que pour $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\left| \int e^{i\phi(x, \xi)} a(x, \xi) u(x) dx \right| \leq \|a\|_{\tilde{K}, \epsilon}^{A_a, B_a} \|u\|_{\tilde{K}, A_u} \exp((\epsilon - c)|\xi|^{1/\sigma}).$$

Une remarque analogue à celle de la proposition 1.1 est aussi valable, si les fonctions $|\nabla_x \phi_\nu|^{-1}$ sont uniformément bornées sur $\tilde{K} \times \{|\xi| \geq B_\phi\}$.

En utilisant cette proposition on voit que si $a \in S^{\infty, \sigma}(X \times \mathbb{R}^N; \tilde{K}, A_a, B_a)$ on peut choisir $\epsilon \in]0, C[$ et donc qu'on a

$$I_\phi(au) = \int d\xi \int e^{i\phi(x, \xi)} a(x, \xi) u(x) dx.$$

Si $\nabla_\xi \phi(x, \xi) \neq 0$ pour $|\xi| \geq B_\phi$ on peut définir d'une façon analogue à (1.7) l'intégrale oscillante

$$I_\phi(a)(x) = \text{Os} - \int e^{i\phi(x, \xi)} a(x, \xi) d\xi, \quad a \in S^{\infty, \sigma}(X \times \mathbb{R}^N), \quad x \in X$$

et prouver la

PROPOSITION 1.8

Si $X_\phi = \{x \in X; \nabla_\xi \phi(x, \xi) \neq 0, |\xi| \geq B_\phi\}$, alors pour tout compact \tilde{K} de X_ϕ et tout $a \in S^{\infty, \sigma}(X \times \mathbb{R}^N; \tilde{K}, A_a, B_a)$, il existe $\epsilon, C > 0$ dépendant seulement de $\tilde{K}, A_a, B_a, \phi$ telles que pour tout $x \in \tilde{K}$

$$|I_\phi(a)(x)| \leq C \|a\|_{\tilde{K}, \epsilon}^{A_a, B_a}$$

On en déduit que si $u \in G_o^{(\sigma)}(X_\phi)$ et $a \in S^{\infty, \sigma}(X \times \mathbb{R}^N)$ on a

$$I_\phi(au) = \int I_\phi(a)(x) u(x) dx.$$

2 - OPERATEURS INTEGRAUX DE FOURIER D'ORDRE INFINI

Soit maintenant $X = \Omega \times \Omega$, Ω ouvert de \mathbb{R}^n , $a \in S^{\infty, \sigma}(X \times \mathbb{R}^N)$ et soit $\varphi \in S^{1, \sigma}(X \times \mathbb{R}^N)$ une fonction de phase par rapport à (y, ξ) pour tout $x \in \Omega$ et donc telle que

$$\nabla_{y, \xi} \varphi(x, y, \xi) \neq 0 \text{ pour } (x, y, \xi) \in \Omega \times \Omega \times \{|\xi| \geq B_\varphi\}.$$

Pour $u \in G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ on définit

$$(2.1) \quad (Au)(x) = Os - \iint e^{i\varphi(x, y, \xi)} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi, \quad x \in \Omega$$

En s'appuyant sur la proposition 1.7 on prouve que si $\nabla_y \varphi(x, y, \xi) \neq 0$ pour $(x, y, \xi) \in \Omega \times \overset{\vee}{K} \times \{|\xi| \geq B_\varphi\}$ on a

$$(Au)(x) = \int d\xi \int e^{i\varphi(x, y, \xi)} a(x, y, \xi) u(y) dy, \quad x \in \Omega^{(4)}$$

A l'aide de la proposition 1.6 et de la remarque 1.2 on prouve aussi la

PROPOSITION 2.1

Si $a \in S^{\infty, \sigma}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in S^{1, \sigma}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^N)$ est une fonction de phase par rapport à (y, ξ) , alors (2.1) définit une application linéaire et continue de $G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ à $G^{(\sigma)}(\Omega)$.

De même, si φ est aussi une fonction de phase par rapport à (x, ξ) , la transposée tA dans A donnée par

$$({}^tAv)(y) = Os - \iint e^{i\varphi(x, y, \xi)} a(x, y, \xi) v(x) dx d\xi, \quad v \in G_0^{(\sigma)}(\Omega)$$

définit une application linéaire et continue de $G_0^{(\sigma)}(\Omega)$ à $G^{(\sigma)}(\Omega)$. On en déduit que

(4) Le cas $\varphi(x, y, \xi) = \langle x - y, \xi \rangle$ est étudié dans [16].

THEOREME 2.2

Si $a \in S^{\infty, \sigma}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in S^{1, \sigma}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^N)$ est une fonction de phase par rapport à (y, ξ) et à (x, ξ) , alors l'application $u \rightarrow Au$ de $G_o^{(\sigma)}(\Omega)$ à $G^{(\sigma)}(\Omega)$ définit par

$$\langle Au, v \rangle = Os - \iiint e^{i\varphi(x, y, \xi)} a(x, y, \xi) v(x) u(y) dx dy d\xi ,$$

$u \in G_o^{(\sigma)}(\Omega)$, $v \in G_o^{(\sigma)}(\Omega)$ se prolonge en une application linéaire et continue de $G^{(\sigma)' }(\Omega)$ à $G_o^{(\sigma)' }(\Omega)$ dont le noyau est donné par l'ultradistribution

$K_A \in G_o^{(\sigma)' }(\Omega \times \Omega)$ définit par

$$(2.2) \quad K_A(w) = Os - \iiint e^{i\varphi(x, y, \xi)} a(x, y, \xi) w(x, y) dx dy d\xi , \quad w \in G_o^{(\sigma)}(\Omega \times \Omega) .$$

Si

$$(2.3) \quad R_\varphi = \{(x, y) \in \Omega \times \Omega ; \nabla_\xi \varphi(x, y, \xi) \neq 0 \text{ pour } |\xi| \geq B_\phi\}$$

des arguments analogues à ceux qui prouvent la proposition 2.1 quand on considère x et y comme paramètres, montrent que l'intégrale oscillante

$$I_\phi(a)(x, y) = Os - \int e^{i\varphi(x, y, \xi)} a(x, y, \xi) d\xi , \quad (x, y) \in R_\varphi ,$$

définit une fonction de $G^{(\sigma)}(R_\varphi)$ égale à la restriction de K_A à R_φ .

Si en particulier $R_\varphi = \Omega \times \Omega$, alors $K_A \in G^{(\sigma)}(\Omega \times \Omega)$ et $Au \in G^{(\sigma)}(\Omega)$ pour tout $u \in G^{(\sigma)' }(\Omega)$.

On est conduit ainsi au

THEOREME 2.3

Si φ satisfait aux hypothèses du théorème 2.2, alors pour chaque $u \in G^{(\sigma)' }(\Omega)$ et $a \in S^{\infty, \sigma}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \sigma - \text{sing supp } Au &\subset C_\varphi \circ \sigma - \text{sing supp } u = \\ &= \{x \in \Omega ; \exists y \in \sigma - \text{sing supp } u, (x, y) \in C_\varphi\} , \end{aligned}$$

où $C_\varphi = C R_\varphi$, R_φ est défini par (2.3) et σ -sing supp Au dénote le plus petit fermé de Ω en dehors duquel $Au \in G^{(\sigma)}$.

Le calcul avec les opérateurs du type (2.1) sera obtenu aux opérateurs près qu'on appelle σ -régularisant d'après la

DEFINITION 2.4

On dit qu'un opérateur linéaire et continu de $G_o^{(\sigma)}(\Omega)$ à $G^{(\sigma)}(\Omega)$ est σ -régularisant si, il se prolonge en un opérateur linéaire et continu de $G^{(\sigma)' }(\Omega)$ à $G^{(\sigma)}(\Omega)$. On prouve que

PROPOSITION 2.5

Si $p \in S^{\infty, \sigma}(\Omega \times R^n)$ et $p \sim 0$ dans $SF^{\infty, \sigma}(\Omega \times R^n)$, alors l'opérateur (2.1) avec $a(x, y, \xi) = p(x, \xi)$ est σ -régularisant.

Dans la suite nous serons intéressé au cas où $n = N$ et $\varphi(x, y, \xi) = \phi(x, \xi) - \langle y, \xi \rangle$ où ϕ appartient à l'ensemble \mathcal{P} défini par la

DEFINITION 2.6⁽⁵⁾

On dénote par \mathcal{P} l'ensemble de toutes les fonctions $\phi \in S^{1, \sigma}(\Omega \times R^n)$ à valeurs réelles, homogènes de degré un par rapport à ξ si $|\xi|$ est suffisamment grand et tel que pour tout compact K de Ω

$$\sum_{|\alpha+\beta| \leq 2} \sup_{(x, \xi) \in K \times R^n} \{ |D_\xi^\alpha D_x^\beta [\phi(x, \xi) - \langle x, \xi \rangle]| / (1 + |\xi|)^{1-|\alpha|} \} \leq \tau_K$$

pour une constante $\tau_K \in [0, 1[$.

On voit immédiatement que tous les $\varphi = \phi(x, \xi) - \langle y, \xi \rangle$ avec $\phi \in \mathcal{P}$ satisfont aux hypothèses des théorèmes 2.2 et 2.3.

(5) Voir Kumano-go [9].

Entre les règles de composition d'opérateurs du type (2.1) donnons ici la suivante.

THEOREME 2.7

Soient P_1, P_2 opérateurs du type (2.1) avec $\varphi(x-y, \xi)$ donné par $\langle x-y, \xi \rangle$ et $\phi(x, \xi) = \langle y, \xi \rangle$, $\phi \in \mathcal{S}$, respectivement et soit $a(x, y, \xi) = p_i(x, \xi)$, $p_i \in S^{\infty, \sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$. On suppose que l'opérateur P_1 soit propre⁽⁶⁾ et que pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe deux constantes positives A_1, B_1 telles que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n} \sup_{\substack{x \in K \\ |\xi| \geq B_1}} A_1^{-|\alpha+\beta|} \alpha!^{-1} \beta!^{-\sigma} |D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} P_1(x, \xi)| (1+|\xi|)^{|\alpha|} \exp(-\varepsilon|\xi|^{1/\sigma}) < +\infty.$$

Alors $P_1 P_2 = Q + R$

où R est un opérateur σ -régularisant et Q est défini par

$$(2.4) \quad (Qu)(x) = Os - \iint e^{i\phi(x, \xi) - \langle y, \xi \rangle} q(x, \xi) u(y) dy d\xi$$

où $q(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} q_j(x, \xi)$,

avec $q_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=j} \alpha!^{-1} D_y^{\alpha} [D_{\xi}^{\alpha} P_1(x, \nabla_x \phi(x, y, \xi)) P_2(y, \xi)]_{y=x}$

Ici $\nabla_x \phi(x, y, \xi) = \int_{\sigma}^1 \nabla_x \phi(y + \theta(x-y), \xi) d\theta$.

Si $u \in G^{(\sigma)'}(\Omega)$ et U est un ouvert convexe relativement compact de Ω tel que $\text{supp } u \subset U$, il existe $u_0 \in C_0(\bar{U})$ et un opérateur ultradifférentiable $P(D)$ tel que $P(D)u_0 = u$ ⁽⁷⁾. En utilisant cette propriété ainsi que l'opérateur (1.4) avec $\phi(x, \xi) = \langle y, \xi \rangle - \langle x, \theta \rangle$ au lieu de $\phi(x, \xi)$ et la partition de l'unité (1.6), on prouve pour le front d'onde $WF^{(\sigma)}(Au)$ de Au par rapport à l'espace $G^{(\sigma)}$, le même résultat que dans le cas des opérateurs d'ordre fini⁽⁸⁾, c'est à dire le

(6) C'est à dire tel que si K_p est le noyau, $\text{supp } K_p \cap (K \times \Omega)$ et $\text{supp } K_p \cap (\Omega \times K)$ sont compactes dans $\Omega \times \Omega$ quelque soit le compact K de Ω .

(7) Voir H. Komatsu [8].

(8) Voir K. Taniguchi [13].

THEOREME 2.8

Si A est l'opérateur défini par (2.1) où $\varphi = \phi(x, \xi) - \langle y, \xi \rangle$, $\phi \in \mathcal{P}$ alors pour tout $u \in G^{(\sigma)'}(\Omega)$

$$WF^{(\sigma)}(Au) \subset \{(x, \rho \nabla_x(x, \xi)) ; (\nabla_\xi \phi(x, \xi), \xi) \in WF^{(\sigma)}(\Omega) ,$$

pour $|\xi|$ grand, $\rho > 0\}$.

On dénotera par $OPS^{\infty, \sigma}(\Omega)$ l'ensemble des opérateurs du type (2.1) tels que $\varphi(x, y, \xi) = \langle x-y, \xi \rangle$ et $a(x, y, \xi) = a(x, \xi) \in S^{\infty, \sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, c'est à dire le cas des opérateurs pseudo-différentiels.

3 - CONSTRUCTION D'UNE PARAMETRIX POUR LE PROBLEME DE CAUCHY

En s'appuyant sur les résultats des numéros précédents nous allons représenter sous la forme d'un opérateur du type (2.1) une paramétrix pour le problème de Cauchy

$$(3.1) \quad \begin{cases} P(t, x, D_t, D_x)u(x, t) = f(x, t) & (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ D_t^k u(0, x) = g_j(x) & x \in \Omega, k = 0, \dots, m-1 , \end{cases}$$

pour l'opérateur hyperbolique d'ordre m

$$P(t, x, D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(t, x, D_x) D_t^j ,$$

où $a_j(t, x, D_x)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $p(m-j)$, $p \in]0, 1[$, sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n . On suppose que pour $\sigma \in]1, 1/p[$ donné les fonctions $t \rightarrow a_j(t, x, \xi)$, ainsi que toutes les dérivées par rapport à t, sont bornées dans $S^{p(m-j), \sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ pour $t \in [0, T]$, c'est à dire que pour tout $h \in \mathbb{Z}_+$ et tout compact K de Ω il existe des constantes $A, B > 0$ telles que

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n} \sup_{|\xi| \geq \beta |\alpha|^\sigma} \sup_{\substack{x \in K \\ t \in [0, T]}} A^{-|\alpha+\beta|} \alpha!^{-1} \beta!^{-\sigma} (1+|\xi|)^{-p(m-j)+|\alpha|} \\ |D_t^h D_\xi^\alpha D_x^\beta a_j(t, x, \xi)| < +\infty$$

On suppose en plus que les opérateurs a_j sont propres et que $f \in C^\infty([0, T] ; G^{(\sigma)' }(\Omega))$, $g_j \in G^{(\sigma)' }(\Omega)$, $j = 0, \dots, m-1$.

Pour chaque $s, t, 0 \leq s < t \leq T$, on cherche $E(t, s) \in OPS^{\infty, \sigma}(\Omega)$ tel que

i) Pour chaque $s \in [0, T[$ la fonction $t \rightarrow e(t, s; x, \xi)$, $t \in [s, T]$, à valeurs dans $S^{\infty, \sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ soit bornée ainsi que toutes ses dérivées par rapport à t jusqu'à l'ordre m et

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ii)} \\ P(t, x, D_t, D_x) E(t, s) = R(t, s), \quad t \in [s, T] \\ D_t^j E(s, s) = 0 \quad j = 0, \dots, m-2 \\ D_t^{m-1} E(s, s) = i I \end{array} \right.$$

où $R(t, s)$ est un opérateur σ -régularisant pour chaque s, t et I est l'opérateur identité. Si au lieu de $e(t, s; x, \xi)$ on cherche une série formelle

$\sum_{h \geq 0} e_n(t, s; x, \xi)$ équivalent d'après la définition 1.4 à $e(t, s; x, \xi)$ pour chaque s, t , alors, comme conséquence du théorème 2.7, $P(t, x, D_t, D_x) E$ est égal à un opérateur σ -régularisant près, à un opérateur $Q(t, s) \in OPS^{\infty, \sigma}(\Omega)$ tel que $q(t, s, x, \xi) \sim \sum_{h > 0} q_h(t, s; x, \xi)$

$$\text{où} \quad q_n(t, s; x, \xi) = D_t^m e_n(t, s; x, \xi) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|+K=n} \alpha!^{-1} \partial_\xi^\alpha a_j(t, x, \xi) D_x^\alpha D_t^j e_n(t, s; x, \xi).$$

Pour la proposition 2.5, la première équation (3.2) sera alors satisfaite si on choisit $e_n(t, s; x, \xi)$ de façon que $q_n(t, s; x, \xi) \equiv 0$ pour $n = 0, 1, \dots$. Les fonctions e_n doivent être alors solutions des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(t,x,\xi) D_t^j e_o(t,s;x,\xi) = 0 \quad s \leq t \leq T \\ D_t^j e_o(s,s;x,\xi) = 0 \quad j = 0, \dots, m-2 \\ D_t^{m-1} e_o(s,s;x,\xi) = i \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(t,x,\xi) D_t^j e_n(t,s;x,\xi) = \\ \quad = - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\ell=1}^n \sum_{|\alpha|=\ell} \alpha!^{-1} \partial_\xi^\alpha a_j(t,x,\xi) D_x^\alpha D_t^j e_{n-\ell}(t,s;x,\xi) \\ D_t^j e_n(s,s;x,\xi) = 0 \quad j = 0, \dots, m-1. \end{array} \right.$$

On prouve par induction que les fonctions e_n solutions de ces problèmes donnent lieu effectivement à une série $\sum_{n \geq 0} e_n$ dans $SF^{\infty, \sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ et d'après le théorème 1.5 qu'il existe $e(t,s;x,\xi) \sim \sum_{n \geq 0} e_n(t,s;x,\xi)$ tel que $E(t,s) \in OPS^{\infty, \sigma}(\Omega)$ et satisfait aux conditions i) et ii) ci-dessus.

D'autre part si $H(t,s) \in OPS^{\infty, \sigma}(\Omega)$ satisfait à i) et ii) quand P est remplacé par son transposé tP , alors pour chaque s, t il existe $Q(t,s) \in OPS^{\infty, \sigma}(\Omega)$ tel que ${}^tH(t,s) - Q(t,s)$ est un opérateur σ -régularisant ainsi que toutes ses dérivées à t jusqu'à l'ordre m ⁽⁹⁾. On en déduit le

THEOREME 3.1

Pour chaque $s, t, 0 \leq s < t \leq T$, il existe $Q(t,s) \in OPS^{\infty, \sigma}(\Omega)$ tel que si $u \in C^m([0, T] ; G^{(\sigma)' }(\Omega))$ et $D_t^j u(o, x) = 0, j = 0, \dots, m-1$, alors pour chaque $\varphi \in G_o^{(\sigma)}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle &= \int_0^t \langle Q(t,s) P(t,x, D_t, D_x) u(s, \cdot), \varphi \rangle ds + \\ &+ \int_0^t \langle R(t,s) u(s, \cdot), \varphi \rangle ds \quad t \in [0, T] , \end{aligned}$$

(9) Voir [16].

où $R(t,s)$ est un opérateur σ -régularisant pour chaque s,t .

Une application du théorème 2.8 à $v(t,x) = u(t,x) - \sum_{j=0}^{m-1} t^j D_t^j u(0,x)$ donne alors le

COROLLAIRE 3.2

Si $u \in C^m([0,T] ; G^{(\sigma)' }(\Omega))$ et P satisfait aux conditions indiquées au début de ce numéro, alors pour chaque $t \in [0,T]$

$$WF^{(\sigma)}(u(t, \cdot)) \subset \left(\bigcup_{0 \leq s \leq t} WF^{(\sigma)}(Pu(s, \cdot)) \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{m-1} WF^{(\sigma)}(D_t^j u(0, \cdot)) \right).$$

REFERENCES

- [1] : T. AOKI - "Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini I". Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 33 (1983), 227-250.
- [2] : P. BOLLEY - J. CAMUS - G. METIVIER : "Régularité Gevrey et itérés pour une classe d'opérateurs hypoelliptiques". Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino, numéro spécial 1983.
- [3] : L. BOUTET DE MONVEL - "Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini". Ann. Inst. Fourier, Grenoble; 22 (1972), 229-268.
- [4] : L. BOUTET DE MONVEL - P. KIEE - "Pseudo-differential operators and Gevrey classes". Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17 (1967); 295-323.
- [5] : L. CATTABRIGA - "Costruzione di una parametrice per il problema di Cauchy per certi operatori comporre principale iperbolica". Sem. di Analisi Matematica del Dipartimento di Matematica della Univ. di Bologna, 1984.
- [6] : S. HASHIMOTO - T. MATSUZAWA - Y. MORIMOTO - "Opérateurs pseudo-différentiels et classes de Gevrey". Comm. in Partial Differential Equations, 8 (1983), 1277-1289.
- [7] : V. IFTIMIE - "Opérateurs hypoelliptiques dans les espaces de Gevrey". Bull. Soc. Sc. Math. Roumanie, 27 (1983), 317-333.
- [8] : H. KOMATSU - "Ultradistributions I structure theorems and a characterization". J. Fac. Sc. Univ. Tokyo Sect. IA Math, 20 (1973) 25-105.
- [9] : H. KUMANO-GO - "Pseudo-differential operators". MIT Press, (1981).
- [10] : G. METIVIER - "Analytic hypoellipticity for operators with multiple characteristics". Comm. in P.D.E. 6 (1981), 1-90.
- [11] : S. MIZOHATA - "Propagation de la régularité au sens de Gevrey pour les opérateurs différentiels à multiplicité constante". J. Vaillant, Sémin. E.D.P. hyperb. et holomorphes, Hermann, Paris, (1984).
- [12] : L. RODINO - L. ZANGHIRATI - "Pseudo-differential operators with multiple characteristics and Gevrey singularities". A paraître.
- [13] : K. TANIGUCHI - "Fourier integral operators in Gevrey class on \mathbb{R}^n and the fundamental solution for a hyperbolic operator". Publ. RIMS, Kyoto Univ., 20 (1984), 491-542.
- [14] : F. TREVES - "Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators". Vol. I, Plenum Press (1981).

- [15] : L.R. VOLEVIC - "Pseudo-differential operators with holomorphic symbols and Gevrey classes". Trans. Moscow Math. Soc. 24 (1974), 43-72 = Trudy Moskov. Mat. Obs., 24 (1971), 43-68.
- [16] : L. ZANGHIRATI - "Pseudo-differential operators of infinite order and Gevrey classes". A paraître.