SERGE ALINHAC

Évolution d'une onde simple pour des équations non-linéaires générales

Journées Équations aux dérivées partielles, n° 1 (1985), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985___1_A10_0>

EVOLUTION D'UNE ONDE SIMPLE POUR DES EQUATIONS NON-LINEAIRES GENERALES.

par S. ALINHAC

Univ. de Paris Sud, Orsay.

Introduction et présentation du résultat.

Nous considérons des solutions u d'une équation non-linéaire générale d'ordre m (ou d'un système) :

$$F(y, u, \dots , \partial_y^\alpha u, \dots) = 0 \quad , \quad |\alpha| \leq m \quad , \quad y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad ,$$

dans une région où u ne présente pas de chocs.

(C'est-à-dire, ici, $u \in H^{s+m}_{loc}(\Omega)$, $s > n/2$).

On s'intéresse à une situation d'évolution : on suppose $y = (t,x)$, $0 \in \Omega$, et les deux hypothèses suivantes :

i) L'opérateur $P = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}} (\dots) \partial_y^\alpha$ linéarisé de F sur $u (u^{(\alpha)} = \partial_y^\alpha u = \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^\alpha} u)$ est strictement hyperbolique par rapport aux surfaces t = cte dans Ω .

ii) L'ouvert Ω_+ est un domaine d'influence de Ω_-.

$(\Omega_\pm = \{ y \in \Omega \ , \ t \gtrless 0 \})$, c'est-à-dire que toute caractéristique réelle de P issue d'un point de Ω_+ atteint un point de Ω_-.

Le problème est de décrire les singularités de u dans Ω_+, connaissant ces singularités dans Ω_-.

Bien entendu, on désire que ces singularités ne soient pas trop nombreuses, par exemple qu'elles restent confinées au-dessus d'un nombre fini de surfaces caractéristiques (u étant C^∞ en dehors de ces surfaces) : on dira alors qu'on décrit l'évolution et les interactions de plusieurs ondes simples (ou progressives).

Les résultats obtenus à ce jour concernent deux cas :

a) n = 2 ; les travaux de Rauch-Reed [8], [9] donnent une description assez complète des phénomènes.

b) L'équation est semi-linéaire, de la forme :

$$P(y, D_y) u + G(y, u, \dots , u^{(\alpha)}, \dots) = 0, \quad |\alpha| \leq m - 1,$$

P satisfait toujours i) et ii).

Les théorèmes généraux d'interaction d'au plus deux ondes sont dus à Bony [5] [6] , tandis que des situations plus complexes ont été étudiées lorsque $P = \square$ (opérateur des ondes) par Bony [6] , Melsose-Ritter [7] , M. Beals [3] .

Nous abordons ici l'étude du cas général complètement non-linéaire dans le cas le plus simple de l'évolution d'une seule onde progressive.

Rappelons d'abord la définition des distributions conormales à une surface régulière Σ (cf. [5]) : $v \in H^{s,k}(\Sigma)$ $(s \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N})$ si , pour tout $\ell \leq k$, $Z_{i_1} \ldots Z_{i_\ell} v \in H^s$, les Z_j étant des champs C^∞ tangents à Σ .

On suppose ici qu'il existe une surface S, caractéristique pour P, d'équation $x_1 = \varphi(t,x')$ dans Ω, $x = (x_1,x')$, $\varphi(0,0) = 0$, $\varphi \in H^\sigma_{loc}$, telle que :

(H) Pour $t < 0$, S est C^∞ , et $u \in H^{s+m,\infty}(S)$.

En particulier, u est C^∞ , dans le passé, hors de S, avec seulement des singularités normales à S : c'est l'onde simple.

Nous allons esquisser la démonstration du théorème suivant :

<u>Théorème</u> : Soient $s > (n/2)+(7/2)$, $\sigma > (n/2)+(3/2)$, et supposons donnée une solution u de l'équation satisfaisant i), ii) et (H).

Alors S est C^∞ dans Ω, et $u \in H^{s+m,\infty}(S)$ dans tout Ω.

Le théorème montre que u n'a de singularités que sur S dans le futur, mais aussi que S est C^∞ , fait remarquable du à la grande régularité tangentielle de u dans le passé.

Le cas de l'interaction de deux ondes simples (ou du problème de Cauchy avec données singulières à travers une surface) fera l'objet d'une publication ultérieure; la situation géométrique y est plus complexe, les surfaces caractéristiques issues de l'arête T n'étant alors C^∞ qu'en dehors de Γ.

<u>I. ETAPES DE LA PREUVE DU THEOREME</u> :

Il y en a trois, que l'on peut décrire succintement comme suit :

<u>$1^{\text{ère}}$ étape</u> : Redressement de S par transport / paralinéarisation de l'équation.

On considère le difféomorphisme $\chi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega$ défini par :

$$\chi\,(x_1, t, x') = (x_1 + \rho(t,x'), t, x'),$$

tel que $\chi^{-1}(S) = \Sigma = \{x_1 = 0\}$.

Ce difféomorphisme est, en général, de classe au mieux $H^{s-(1/2)}$, en sorte qu'on ne peut même pas envisager un tel changement de variables dans l'équation, qui qui est d'ordre m.

On est donc amené à transporter l'équation par m "paradifféomorphisme" χ^* associé à χ, d'une façon qu'on va expliquer plus loin (partie II).

On obtient alors une équation paradifférentielle :

$T_{p^*}\,\chi^* u = R$, où p^* est un symbole différentiel hyperbolique, transporté du symbole p de P par χ, et donc nul sur le conormal de Σ , et où R est un reste assez régulier. (pour tout ce qui concerne les paradifférentiels, voir Bony [4]).

2ème étape : Etablissement d'un calcul symbolique d'opérateurs à coefficients $C^{\rho,k}(\Sigma)$.

Au cours de la preuve, on va montrer, par récurrence sur k, qu'en fait :
$\chi^* u \in H^{s+m,k}(\Sigma)$, et $\varphi \in H^{s-(1/2)+k}$.

Les coefficients de p^*, qui dépendent de u, ne sauraient avoir de meilleure régularité qu'une régularité conormale de type $C^{\rho,k}(\Sigma)$, pour un certain $\rho > 0$.

Pour établir la régularité de $\chi^* u$ à partir d'une information dans le passé, il est nécessaire de commuter à l'opérateur T_{p^*} les champs Z C^∞ tangents à Σ, et donc de disposer du calcul symbolique correspondant.

3ème étape : Régularité de S en fonction de u.

Il s'agit de montrer qu'au fur et à mesure que l'on gagne de la régularité conormale sur $\chi^* u$, on gagne de la régularité (classique) sur φ et χ : cela découle de l'équation de S, qui lie φ à u, et des formules de linéarisation des fonctions composées que l'on va rappeler (prop. 2 ci-dessous).

II. UN BREF RAPPEL SUR LA PARACOMPOSITION : (voir [1] , [2]).

Etant donné un difféomorphisme $\chi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ de classe $C^{\rho+1}$ $(\rho > 0)$, on lui associe un isomorphisme $\chi^* : \mathcal{D}'(\Omega_2) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$, qui fonctionne comme la composition usuelle $u \longmapsto u \circ \chi$, mais tel que :

$$\chi^* : H^s_{loc}(\Omega_2) \longrightarrow H^s_{loc}(\Omega_1) \text{ , pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

L'idée en est simplement la suivante (pour $n = 1$) on veut χ^* tel que l'opérateur $(\chi^*)^{-1} \frac{d}{dx} \chi^*$ soit non pas $(\chi' \circ \chi^{-1}) \frac{d}{dy}$ (comme en serait le cas pour le changement de variables habituel $y = \chi(x)$), mais $T_{(\chi' \circ \chi^{-1})} \frac{d}{dy}$, le produit étant remplacé par un paraproduit, pour lequel la régularité (C^ρ) de $\chi' \circ \chi^{-1}$ compte peu.

On obtient en effet la propriété suivante :

Propriété 1 : si $h \in \sum^m_\alpha$ (classe de symboles classiques d'ordre m à régularité C^α des coefficients de la partie principale, cf., Bony [4]),

$$\chi^* T_h = T_{h^*} \chi^* + R, \text{ où } h^* \in \textstyle\sum^m_\varepsilon \text{ , et}$$

R est $\varepsilon - m$ régularisant $(\varepsilon = \inf(\alpha,\rho))$.

Par ailleurs, on obtient naturellement une formule de linéarisation des fonctions composées :

Propriété 2 : Si $u \in C^\infty$ $(\sigma > 1)$,

$$u \circ \chi = \chi^* u + T_{u' \circ \chi} \chi + R,$$

où $R \in C^{\rho+1+\theta}$, $\theta = \inf(\sigma - 1, \rho + 1)$

(et une version H^s analogue).

L'opérateur χ^* est construit comme un opérateur intégral de Fourier "exotique", et est pseudo-local.

III. LES DEUX PREMIERES ETAPES DE LA PREUVE :

On se place dans la situation du I, et l'on montre d'abord qu'en fait, $\varphi \in H^{s-(1/2)}$

On fait alors l'hypothèse :

(H_k) $\chi^* u \in H^{s+m,k}(\Sigma)$ et $\varphi \in H^{s-(1/2)+k}$.

Bien sûr, (H_o) est vérifiée, et le but ultime de la preuve est de montrer $(H_k) \Longrightarrow (H_{k+1})$.

Les deux premières étapes permettront de montrer que $(H_k) \Longrightarrow \chi^* u \in H^{s+m,k+1}(\Sigma)$ tandis que la troisième étape donnera $\chi^* u \in H^{s+m,k+1}(\Sigma) \Longrightarrow \varphi \in H^{s-(1/2)+k+1}$.

1) L'étape 1) est fondée sur la formule :

$$\chi^* G(v) = T_{G'(v\circ\chi)}\, \chi^* v + R,$$

où χ est de classe $H^{s-(1/2)+k}$, $v \in H^s$, $\chi^* v \in H^{s,k}$, G est C^∞, $s > \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$, et $R \in H^{2s-(n/2)-(3/2),k}$.

Cette formule, appliquée avec $G = F$, $v = (y, \ldots, u^{(\alpha)}, \ldots)$, a ceci d'agréable que l'équation $F(y, \ldots, u^{(\alpha)}, \ldots) = 0$ se trouve à la fois transportée et paralinéarisée : on obtient

$$T_{p^*}\, \chi^* u = R, \quad \text{et} \quad R \in H^{s+1,k+1} \quad \text{si} \quad s > \frac{n}{2} + \frac{7}{2}.$$

2) Deux propositions typiques de calcul symbolique dont on a vu la nécessité à l'étape 2) sont les suivantes (nous les donnons à titre d'illustration) :

<u>Proposition</u> : Si Z désigne l'un des champs $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$, ∂_t ou ∂_{x_j} $(j \geqslant 2)$ (tangents à Σ), on a, pour $a \in C^{\rho,k}(\Sigma)$, $v \in H^{s,k}(\Sigma)$,

$$Z\, T_a v = T_{Za}\, v + T_a\, Zv + R, \quad R \in H^{s+\rho,k}(\Sigma).$$

<u>Proposition</u> : Soient $a, b \in C^{\rho,k}(\Sigma)$. Alors :

$$T_a T_b - T_{ab} \text{ aplique } H^{s,k} \text{ dans } H^{s+\rho,k}.$$

Ces propositions, et d'autres analogues, permettent d'établir une formule convenable pour le crochet $[Z^I, T_{p^*}]$, que nous épargnerons au lecteur.

En combinant cela avec 1), on obtient, pour

$$|I| = k+1, \quad T_{p^*} Z^I \chi^* u \in H^{s+1},$$

d'où $Z^I \chi^* u \in H^{s+m}$ par propagation de Ω_- à Ω_+, selon Bony [4], c'est-à-dire $\chi^* u \in H^{s+m,k+1}$.

IV. REGULARITE DE S :

Si $\lambda = \lambda(y, u^{(\alpha)}, \xi)$ est la racine réelle (C^∞ de ses arguments) de l'équation en τ

$p_m(y, \xi, \tau) = 0$, correspondant à la surface S, on a :

$$\varphi_t = \lambda(\varphi(t,x'), t, x', u^{(\alpha)}(\varphi, t, x'), -1, \varphi_{x'}).$$

(on est ici dans les coordonnées d'origine dans Ω).

Proposition : Soit $s > \frac{n}{2} + 3$, $\sigma > \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$. Alors :

i) $\varphi \in H^{s-(1/2)}$

ii) si $\chi^* u \in H^{s+m,k}(\Sigma)$, $\varphi \in H^{s-(1/2)+k}$.

On note que $u^{(\alpha)}(\varphi(t,x'), t, x') = (u^{(\alpha)} \circ \chi)\Big|_{x_1=0}$, et la formule de linéarisation (prop. 2 de II) donne :

$$u^{(\alpha)}(\varphi, t, x') = \chi^* u^{(\alpha)}\Big|_{x_1=0} + T_{\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial x_1}(\varphi, t, x')} \varphi + R$$

A cause de l'hypothèse sur $\chi^* u$, on obtient $\chi^* u^{(\alpha)} \in H^{s,k}$, et

$\chi^* u^{(\alpha)}\Big|_{x_1=0} \in H^{s+k-(1/2)}$ (c'est là le point crucial) ;

quant au terme en φ, on le garde dans l'équation, et l'on trouve, en paralinéarisant l'équation de départ :

$$\varphi_t = T_{\frac{\partial \lambda}{\partial \xi'}} \varphi_{x'} + T_A \varphi + R, \qquad R \in H^{s-(1/2)+k}.$$

Comme φ est C^∞ pour $t < 0$, on en déduit la proposition par propagation, les courbes intégrales du champ $\partial_t + \frac{\partial \lambda}{\partial \xi'} \partial_{x'}$ n'étant autres que des caractéristiques de P dans S.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC : Paracomposition et opérateurs paradifférentiels, article à paraître aux Comm. in PDE.

[2] S. ALINHAC : Paracomposition et application aux équations non-linéaires, Séminaire Bony-Meyer-Sjöstrand, Ecole Polytechnique, Paris, 1985.

[3] M. BEALS : Self-spreading and strength of singularities for solutions to semi-linear wave equations, Ann. of Math. 118(1983), 187 - 214.

[4] J.M. BONY : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires, Ann. Scient. ENS, 14(1981), 209 - 246.

[5] J.M. BONY : Intéraction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1979-80, n°22.

[6] J.M. BONY : Intéraction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non-linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1983-84, n°10.

[7] R. MELROSE, N. RITTER : Interaction of non-linear progressing waves, Lecture at Notre-Dame Conference on Microlocal Analysis (1984), et article à paraître.

[8] J. RAUCH M. REED : Propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations in one space varaible, Ann. of Math. III(1980), 531 - 552.

[9] J. RAUCH M. REED : Jump discontinuities of semi-linear strictly hyperbolic systems in two variables : creation and propagation, Comm. Math. Phys. 81(1981), 203 - 227.