

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PIERRE BOLLEY

JACQUES CAMUS

MONIQUE DAUGE

Régularité Gevrey pour un problème aux limites dans un ouvert à singularité conique

Journées Équations aux dérivées partielles (1984), p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1984____A6_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

JOURNEES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1984

REGULARITE GEVREY POUR UN PROBLEME AUX LIMITES

DANS UN OUVERT A SINGULARITE CONIQUE

par

Pierre BOLLEY, Jacques CAMUS, Monique DAUGE

Universités de NANTES et RENNES

§1. Introduction

Considérons le problème de Dirichlet associé à un opérateur différentiel proprement elliptique L d'ordre $2m$ sur un domaine Ω borné dans \mathbb{R}^n . Si les coefficients de L sont analytiques jusqu'au bord de Ω , et si Ω est à bord analytique, alors L a la régularité Gevrey d'ordre s jusqu'au bord pour tout $s \geq 1$ (cf [LM]), i.e.:

si $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$ est tel que $Lu \in G^s(\overline{\Omega})$, alors $u \in G^s(\overline{\Omega})$; rappelons que $f \in G^s(\overline{\Omega})$ s'il satisfait aux estimations :

$$\exists C > 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)} \leq C^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s$$

Dans cet exposé, nous nous intéressons au problème :

$$(D) \quad \begin{cases} u \in \mathring{H}^m(\Omega) \\ Lu \in G^s(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

lorsque Ω admet une singularité conique, c'est-à-dire que Ω a un bord régulier, sauf au voisinage V d'un point 0 , où Ω coïncide avec un cône Γ de sommet 0 . Nous supposons que la section ω de Γ sur la sphère S^{n-1} de centre 0 est à bord analytique. Enfin L est toujours supposé elliptique à coefficients analytiques sur $\overline{\Omega}$.

Par la présence du point conique, il existe toujours u solution de (D) et n'ayant pas la régularité $G^s(\overline{\Omega})$.

Par contre, grâce à la théorie de décomposition en parties régulière et singulière de [K] - voir aussi l'hypoellipticité dans les espaces à poids gradués A_{gr} de [MM] - on obtient que si $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$ et est tel que $Lu \in C^\infty(\overline{\Omega})$, alors u admet pour tout $x \geq m - \frac{n}{2}$ un développement asymptotique (A_x) au voisinage de 0 :

$$(A_x) \quad u = \sum_{z \in Z, m - \frac{n}{2} < \operatorname{Re} z < x} \sum_{p=0}^P r^z \operatorname{Log}^p r a_{z,p}(\theta) + u_x$$

où :

* $(r, \theta) = (|X|, \frac{X}{|X|})$ désignent les coordonnées polaires dans \mathbb{R}^n ,

* $a_{z,p} \in \mathring{H}^m(\omega) \cap C^\infty(\overline{\omega})$,

* $u_x = O(r^{x+\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$ (reste du développement),

* Z est un ensemble discret de \mathbb{C} , contenant \mathbb{N} , ne dépendant que de l'opérateur; pour chaque x , l'ensemble des $z \in Z$ tels que $m - \frac{n}{2} < \operatorname{Re} z < x$ est fini. La limitation inférieure de la somme par $m - \frac{n}{2}$ correspond à la régularité H^m de u .

A fortiori, quand u est solution de (D), u admet un tel développement. Nous étudierons alors les u_x . D'autre part, si u est supposée a priori $C^\infty(\overline{\Omega})$,

(A_x) coïncide avec le développement de Taylor de u en 0 ; nous étudierons alors la régularité G^s de u . Cette dernière étude a été faite dans le cadre analytique ($s = 1$) par Baouendi et Sjöstrand dans [BS].

Nous obtiendrons aussi un résultat d'hypoellipticité G^s dans des espaces à poids.

Tous nos énoncés et démonstrations incluent le cas analytique.

§2. Résultats.

Rappelons que, dans toute la suite :

- * $s \geq 1$.
- * L est proprement elliptique d'ordre $2m$ à coefficients analytiques sur $\overline{\Omega}$.
- * Ω coïncide sur un voisinage V de 0 avec un cône Γ à section ω à bord analytique.

A. Régularité à partir du C^∞ .

En coordonnées polaires, L s'écrit au voisinage de 0 :

$$L(X ; D_X) = r^{-2m} Q(r, \theta ; r D_r, D_\theta)$$

où Q est à coefficients analytiques au voisinage de $r = 0$ dans $\overline{\mathbb{R}^+} \times \overline{\omega}$. D'autre part, $Q(0, \theta ; D_t, D_\theta)$ est elliptique, et nous introduisons son demi-cône caractéristique :

$$\Gamma_+ = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \operatorname{Re} z \geq 0 / \exists (\theta, \eta) \in \overline{\omega} \times \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, Q_{2m}(0, \theta ; -iz, \eta) = 0\}$$

où Q_{2m} désigne la partie principale de Q .

Γ_+ ne rencontre pas $i\mathbb{R}$.

Soit $\hat{\Gamma}_+$ le cône convexe engendré par Γ_+ et \mathbb{R}_+ . On introduit l'hypothèse (H) :

(H) l'ouverture de $\hat{\Gamma}_+$ est strictement inférieure à $\frac{\pi}{n}$

Théorème 1.

Si (H) est vérifiée, toute solution $C^\infty(\overline{\Omega})$ de (D) est dans $G^s(\overline{V})$.

Remarques.

a) Dans [BS] est obtenu le résultat correspondant pour $s = 1$, sous la même hypothèse sur l'opérateur.

b) Si L est homogène à coefficients constants, on a :

$$L(D_x) = r^{-2m} Q(0, \theta ; r D_r, D_\theta)$$

et on a encore la conclusion du théorème 1 en remplaçant (H) par l'hypothèse (H') plus faible :

(H') chaque composante connexe de Γ_+ est d'ouverture $< \frac{\pi}{n-1}$.

Cette hypothèse est toujours vérifiée quand $n = 2$.

Exemples d'opérateurs vérifiant (H).

a) le laplacien et ses itérés.

b) en dimension 2, la partie principale de L en 0 peut se factoriser sous

$$\text{la forme } \prod_{j=1}^{2m} (D_{x_1} + a_j D_{x_2}).$$

On peut montrer que (H) est vérifiée dans les deux situations suivantes :

i) $a_j = e^{i\zeta_j}$ avec $\frac{\pi}{4} < |\zeta_j| < \frac{3\pi}{4}$,

ii) $a_j = i b_j$ avec b_j réel.

Signalons que l'un des intermédiaires de démonstration utilisés sera la caractérisation suivante des fonctions G^S par des estimations sur les restes u_k de leur développement de Taylor en 0 :

Proposition

Soit $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. u est $G^S(\bar{V})$ si et seulement si on a les estimations :

$$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad |\alpha| \leq k :$$

$$\|r^{|\alpha|-k} D^\alpha u_k\|_{L^2(V)} \leq C^{k+1} (k!)^{s-1} |\alpha| !$$

B. Estimation des restes.

Nous ne faisons plus d'hypothèses de régularité sur u , hormis $u \in H^m(\Omega)$. On a déjà signalé que u admet un développement asymptotique (A_x) . Voici une définition généralisant naturellement l'estimation ci-dessus :

Définition

Nous dirons qu'une fonction u admet un développement asymptotique en 0 de type G^S si pour tout $x > 0$ u admet un développement du type (A_x) et si il existe une suite $x_k \in [k, k+1[$, $k \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k$$
$$\|r^{|\alpha|-k} D^\alpha u_{x_k}\|_{L^2(V)} \leq C^{k+1} (k!)^{s-1} |\alpha| !$$

Théorème 2

Si $n = 2$ et si L est homogène à coefficients constants, alors toute solution du problème (D) admet un développement asymptotique en 0 de type G^S .

Remarques:

- a) On a encore le même résultat en dimension $n \geq 3$ si $L = \Delta$.
- b) Pour $s = 1$, le théorème 2 donne une convergence par paquets du développement asymptotique et a été démontré sous cette forme dans [D].

C. Hypoellipticité Gevrey à poids.

Pour le problème de Dirichlet :

$$(P) \quad \begin{cases} \gamma_j u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, j=0, \dots, m-1 ; u \in H_{loc}^m(\bar{\Omega} \setminus \{0\}) \\ Lu = f \end{cases}$$

on a un résultat classique d'augmentation de régularité dans les espaces W_γ^k suivants, $k \in \mathbb{N}$, ou $k = \infty$:

$$u \in W_\gamma^k(\Omega) \iff \forall \alpha, |\alpha| \leq k \quad r^{|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega)$$

On a :

si $u \in W_\gamma^0(\Omega)$ est solution de (P) avec $f \in W_{\gamma+2m}^\infty$, alors $u \in W_\gamma^\infty$. On peut rapprocher ce résultat de l'A-hypoellipticité de [MM], car $A = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{R}} W_\gamma^\infty$.

Les classes Gevrey à poids pour $s \geq 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ peuvent être définies comme l'espace $G_\gamma^s(\bar{V})$ des $u \in W_\gamma^\infty$ vérifiant :

$$\exists C > 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \| r^{|\alpha|} D^\alpha u \|_{L^2(V)} \leq C^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s$$

Théorème 3

Si u est solution de (P) avec $f \in G_{\gamma+2m}^s(\bar{\Omega})$ et si $u \in W_\gamma^0(\Omega)$, alors $u \in G_\gamma^s(\bar{V})$.

§3. Structure des démonstrations.

Voici d'abord les principaux intermédiaires de démonstration du théorème 1.

A. Localisation

Comme le problème est local au voisinage de 0, on peut, en tronquant, passer de $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ vérifiant (D) à $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ vérifiant (D_R) pour un $R > 0$:

$$(D_R) \quad \begin{cases} u \in H^m(\Gamma) \\ \text{supp } u \subset \Gamma_{3R} \\ Lu \in G^s(\Gamma_{2R}) \end{cases}$$

où : $\Gamma_R = \{X \in \Gamma / |X| < R\}$

Pour montrer le th. 1, il suffit de prouver que $u \in G^s(\bar{\Gamma}_R)$

B. Développement de Taylor d'une fonction G^S .

Voici la caractérisation que nous utiliserons :

Théorème 3.1.

Soit $u \in C^\infty(\bar{\Gamma})$ à support dans $\bar{\Gamma}_{3R}$. Soit $\gamma \in]-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1[$.

Alors $u \in G^S(\bar{\Gamma}_R)$ si et seulement si on a les estimations (E_1) et (E_2) suivantes :

$$(E_1) \quad \exists C_1, \forall k \in \mathbb{N}, \|r^{\gamma-k} u_k\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1^{k+1} (k!)^{s-1}$$

$$(E_2) \quad \exists C_2, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha, |\alpha| \leq k, \|r^{\gamma-k+|\alpha|} D^\alpha u_k\|_{L^2(\Gamma_R)} \leq C_2^{k+1} (k!)^{s-1} \alpha!$$

(E_1) est globale sur Γ ; (E_2) n'est donnée que sur Γ_R . L'argument principal de la preuve de ce résultat est la formule de Taylor avec reste intégral en 0 appliquée à $D^\alpha u_k$ par rapport à l'opérateur de dérivation ∂_r .

C. Estimations sans dérivées.

A l'aide de la transformation de Mellin, d'une manière assez analogue à [BS], utilisant en particulier le théorème de Phragmen-Lindelöf, on obtient (E_1) :

Théorème 3.2.

Soit $u \in C^\infty(\bar{\Gamma})$ et vérifiant (D_R) . Soit $\gamma \in]-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1[$. Alors u vérifie l'estimation (E_1) .

D. Caractère G^S ponctuel.

On dit que $g \in G^S(0)$ si $\exists C, \forall \alpha, |D^\alpha g(0)| \leq C^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s$.

A l'aide, en particulier, des inégalités de Markov et Bernstein (cf [BS]), on obtient :

Théorème 3.3.

Soit $u \in C^\infty(\bar{\Gamma})$ vérifiant l'estimation (E_1) .

Alors $u \in G^S(0)$.

A ce niveau, dans le cas où $s = 1$ (cf [BS]) la démonstration est terminée, car $u \in G^1(0)$ et vérifie (E_1) , donc son développement de Taylor en 0 converge et sa limite est u lui-même. Donc u est analytique. Pour $s > 1$, nous devons continuer l'étude et démontrer (E_2) .

E. Estimation a priori.

C'est une estimation dans des espaces à poids avec contrôle de la constante en fonction du poids et de l'ordre de dérivation.

On reprend les notations du §2.C.

Théorème 3.4.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $v \in W_x^\infty(\Gamma_{2R})$ solution du problème (P). Alors on a l'estimation pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\frac{1}{\alpha!} \|r^{x+|\alpha|} D^\alpha v\|_{L^2(\Gamma_R)} \leq C^{|x|+|\alpha|+1} \left[\sum_{|\beta| \leq (|\alpha|-2m)_+} \frac{1}{\beta!} \|r^{x+|\beta|} D^\beta (r^{2m} L v)\|_{L^2(\Gamma_{2R})} + \|r^x v\|_{L^2(\Gamma_{2R})} \right]$$

où C ne dépend ni de v, ni de x, ni de α .

La preuve est basée sur des estimations a priori (dans des couronnes) du type de celles de [B] (obtenues par ouverts emboîtés), et sur une partition dyadique, ce qui discrétise le poids à un facteur $C^{|x|}$ près.

F. Estimations des dérivées.

Pour obtenir que u est $G^s(\overline{\Gamma}_R)$, comme on a déjà que u vérifie (E_1) par le th. 3.2, il reste, au vu du th. 3.1, à montrer que u vérifie (E_2) . On se ramène alors à montrer la majoration (E_3) suivante :

$$(E_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \beta, \quad |\beta| \leq k \\ \|r^{-k+|\beta|} D^\beta (r^{2m} L u_k)\|_{L^2(\Gamma_{2R})} \leq C^{k+1} (k!)^{s-1} \beta! \end{array} \right.$$

En effet, cette majoration injectée dans l'estimation du th. 3.4 pour $x = -k$ et $v = u_k$ (qui s'annule bien à l'ordre m sur $\partial\Gamma$), avec en plus, (E_1) pour le terme $\|r^{-k} u_k\|$, donne bien (E_2) .

Intéressons-nous à (E_3) . $r^{2m} L = Q$ par définition. Pour obtenir (E_3) , on analyse $Q u_k$.

$$\text{Soit } P_k g \equiv g - g_k = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{D^\alpha g(0)}{\alpha!} X^\alpha.$$

On a :

$$Q u_k = (Q u)_k + P_k(Q u) - Q(P_k u)$$

$(Q u)_k$ est estimé par (E_2) pour $Q u$ qui est $G^s(\overline{\Gamma}_{2R})$. Pour l'autre, on remarque que :

$$Q(P_k u) - P_k(Q u) = [Q(P_k u)]_k$$

qui s'exprime donc uniquement à l'aide des dérivées de u en 0 . L'estimation voulue provient alors du caractère $G^s(0)$ de u montré au th. 3.3.

Le théorème 3 se déduit directement du th. 3.4.

Pour le théorème 2, les th. 3.1. et 3.3. sont sans objet. On obtient l'estimation sans dérivées sur les restes grâce à la transformation de Mellin comme dans le th. 3.2, mais en utilisant, au lieu du théorème de Phragmen-Lindelöf, l'estimation en $A^{|z|}$ de l'inverse de $Q(0, \theta ; -iz, D_\theta)$ démontrée dans [D]. L'estimation complète des restes se déduit alors directement du th. 3.4 en remarquant que, puisque l'opérateur est homogène à coefficients constants, on a :

$$Q u_k = (Q u)_k$$

REFERENCES

- [B] N. BURGER : Powers and Gevrey's regularity for a system of interior and boundary Differential Operators. Bolletino U.M.I. (6) 1-B (1982), 1-16.
- [BS] M.S. BAOUENDI, J. SJÖSTRAND : Analytic regularity for the Dirichlet Problem in domains with conic singularities. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Série IV, Vol. IV, 3 (1977) 515-530.
- [D] M. DAUGE : Second membre analytique pour un problème aux limites elliptique d'ordre $2m$ sur un polygone. Comm. in Partial Differential Equations (1984) 9 (2) 169-195.
- [K] V.A. KONDRAT'EV : Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points. Trans. Moscow Math. Soc. (1967) 227-313.
- [LM] J.L. LIONS, E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 3. Dunod.
- [MM] R. MELROSE, G. MENDOZA : Elliptic boundary problems on spaces with conic points. Journées E.D.P. Saint Jean de Monts 1981, n° 4.