Journées Équations aux dérivées partielles

Omar Debbaj

Régularité höldérienne de certains problèmes aux limites elliptiques singuliers

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A7_0>

REGULARITE HÖLDERIENNE DE CERTAINS PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES SINGULIERS

par O. DEBBAJ

Soient Ω un ouvert borné assez régulier dans $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction positive dans Ω assez régulière et équivalente à la distance au bord. Soit L un opérateur du second ordre, elliptique dans Ω et dégénéré au bord $\Gamma = \partial\Omega$, du type

$$L = \Lambda^*\Lambda + \varphi^2 P + \varphi\Lambda\, Q + R$$

avec Λ un champ de vecteurs réels, C^∞ et transversal à Γ, P un opérateur différentiel du second ordre à coefficients C^∞ dans $\overline{\Omega}$ et Q et R deux opérateurs différentiels du premier ordre à coeffcients C^∞ dans $\overline{\Omega}$.

Soit γ l'application trace sur Γ. On va donner ici un résultat de régularité Höldérienne du problème du Dirichlet

$$(*)\qquad \begin{cases} L\, u = f \text{ dans } \Omega \\ \gamma\, u = \psi \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

L'étude de la régularité H^s des problèmes de type (*) est classique voir par exemple M.S. Baouendi [2] , M.I. Višik-V.V. Grušin [16] , P. Bolley-J. Camus-B. Helffer [4] ,... La régularité Höldérienne pour les problèmes aux limites elliptiques est étudié par S. Agmon-A. Douglis-L. Nirenberg [1]. La régularité Höldérienne des problèmes aux limites pour d'autres opérateurs elliptiques dégénérés est étudiée récemment par C. Goulaouic-N. Shimakura [12] et aussi par Damlakhi [8] avec, pour ce dernier, des donnés dans des espaces de Hölder avec poids.

Dans le cas qui nous intéresse ici, on suivra une méthode totalement différente de [12] et [8], on construit les "noyaux de Poisson et de Green" du problème (*), puis on étudie leurs actions sur les espaces de Hölder. Pour étudier l'action du noyau de Green sur les espaces de Hölder on aura besoin d'étudier l'action des opérateurs $OPS^{m,k}$ de L. Boutet de Monvel [6] sur ces espaces.

Avant de préciser les hypothèses et l'énoncé du résultat principal je tiens à remercier J. Camus pour sa contribution à la réalisation de ce travail ainsi que G. Métivier et J.F. Nourrigat.

Précisons maintenant les hypothèses et l'énoncé du résultat. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de bord Γ. On suppose que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) = 0\} \\ \text{grand } \varphi \neq 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Pour $\mu \in]0,1[$ nous notons

$$C^\mu(\overline{\Omega}) = \{u \in C^\circ(\overline{\Omega}) \ ; \ ||u||_\mu = \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\substack{\Omega x \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu} < +\infty\}$$

Plus généralement, pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\mu \in]0,1[$ et comme ci-dessus nous notons

$$\begin{cases} C^{\ell+\mu}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^\circ(\overline{\Omega}) \ ; \ \partial^\alpha u \in C^\mu(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leqslant \ell\} \\ \mathbf{C}_\varphi^{\ell+1+\mu}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{\ell+1+\mu}(\overline{\Omega}) \ ; \varphi^2 u \in C^{\ell+2+\mu}(\overline{\Omega})\} \\ C_\varphi^{\ell+1+\mu}(\overline{\Omega}) = \{u \in \mathbf{C}_\varphi^{\ell+1+\mu}(\overline{\Omega}) \ ; \ \Lambda^2 u \in C^{\ell+\mu}(\overline{\Omega})\} \end{cases}$$

munis des normes naturelles.

On notera P_2, Q_1 et R_1 les parties principales respectivement de P, Q et R. On fait les hypothèses suivantes :

(H_o) L'opérateur L est elliptique dans Ω.

(H_1) Pour tout $x \in \Gamma$ et pour tout $\xi \in T_x^*\Gamma \backslash \{0\}$ le polynôme $P(\tau) = \tau^2 + i\, Q_1(x,\xi)\tau + P_2(x,\xi)$ admet deux racines $\tau_+(x,\xi)$ et $\tau_-(x,\xi)$ telles que $\operatorname{Im} \tau_+(x,\xi) > 0$ et $\operatorname{Im} \tau_-(x,\xi) < 0$.

(H_2) Pour tout $x \in \Gamma$, pour tout $\xi \in T_x^*\Gamma \setminus \{o\}$ tel que le problème

$$\begin{cases} L_o(x,t,\xi,D_t)\ u(t) = 0 \\ u(o) = 0 \end{cases}$$

n'admet que la solution $u \equiv 0$ dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

$L_o(x,t,\xi,D_t)$ étant l'opérateur différentiel défini par

$$L_o(x,t,\xi,D_t) = D_t^2 + t^2\ P_2(x,\xi) + i\ Q_1(x,\xi)t\ D_t + R_1(x,\xi).$$

On peut, maintenant, énoncer le résultat principal :

Théorème :

Sous les hypothèses (H_o), (H_1) *et* (H_2) *on a : pour* $\ell \in \mathbb{N}$ *et* $\mu \in]0,1[$ *, pour* $f \in C^{\ell+\mu}(\overline{\Omega})$ *et* $\psi \in C^{\ell+1+\mu}(\Omega)$ *si* $u \in H^s(\overline{\Omega})$ *avec* $s > \frac{1}{2}$ *est solution du problème*

$$(*) \qquad \begin{cases} L\ u = f \text{ dans } \Omega \\ \gamma\ u = \psi \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

alors $u \in \mathcal{C}_\psi^{\ell+1+\mu}(\overline{\Omega})$.

Pour établir ce théorème on construit un noyau de Poisson $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\overline{\Omega}))$ et un noyau de Green $\mathcal{G} \in \mathcal{L}(C^\infty(\overline{\Omega}), C^\infty(\overline{\Omega}))$ qui se prolongent respectivement de $C^{\ell+1+\mu}(\Gamma)$ dans $C_\psi^{\ell+1+\mu}(\overline{\Omega})$ et de $C^{\ell+\mu}(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{C}_\psi^{\ell+1+\mu}(\overline{\Omega})$ et tels que :

$$\begin{cases} L\ \mathcal{P}\psi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \\ \gamma\ \mathcal{P}\psi - \psi \in C^\infty(\Gamma) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} L\ \mathcal{G}f - f \in C^\infty(\overline{\Omega}) \\ \gamma\ \mathcal{G}f \in C^\infty(\Gamma) \end{cases}$$

De la régularité H^s du problème $(*)$ on déduit que $v = u - (\mathcal{G}f + \mathcal{P}\psi) \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Il en résulte que $u \in \mathcal{C}^{\ell+1+\mu}(\overline{\Omega})$.

On va donner les grandes lignes de la démonstration de ce théorème. D'abord on commence par localiser le problème. On notera $x = (x',x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et $\xi = (\xi',\xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Dans une carte locale convenable l'opérateur L s'écrit sous la forme :

$$L = D_{x_n}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x)\, x_n\, D_{x_j}\, D_{x_n} + \sum_{j,k=1}^{n-1} b_{jk}(x)\, x_n^2\, D_{x_j}\, D_{x_k} +$$

$$c(x)\, D_{x_n} + \sum_{j=1}^{n-1} d_j(x)\, D_{x_j} + e(x).$$

où les coefficients sont des fonctions C^∞ sur $\overline{\mathbb{R}}^n_+$.

Soient $(H_o)'$, $(H_1)'$ et $(H_2)'$ les hypothèses (H_o), (H_1) et (H_2) traduites dans le demi-espace :

$(H_o)'$ L'opérateur L est elliptique pour $x_n \neq 0$

$(H_1)'$ Pour tous $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ le polynôme en ξ_n

$$\xi_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x',o)\xi_j\xi_n + \sum_{j,k=1}^{n-1} b_{jk}(x',o)\xi_j\xi_k \text{ admet deux racines}$$

$\xi_n^+(x',\xi')$ et $\xi_n^-(x',\xi')$ avec $\operatorname{Im} \xi_n^+(x',\xi') > 0$ et $\operatorname{Im} \xi_n^-(x',\xi') < 0$.

$(H_2)'$ Pour tous $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ le problème

$$\begin{cases} L_o(x,\xi',D_{x_n})\, u(x_n) = 0 \\ u(o) = 0 \\ u \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+) \end{cases}$$

n'admet que la solution identiquement nulle.

On commence par étudier le noyau de Poisson associé à L.

<u>Noyau de Poisson</u> :

Un noyau de Poisson $\mathcal{P} \in \mathcal{K}^m$ est un opérateur de $C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $C^\infty_{loc}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ tel que

$$\mathcal{P}\psi(x) = (2\Pi)^{-(n-1)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix'.\xi'}\, p(x,\xi')\, \hat{\psi}(\xi')d\xi'$$

où $p(x,\xi')$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ qui vérifie pour tous $M \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\beta' \in \mathbb{N}^{n-1}$ et pour tout compact K de $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|x_n^M \partial_x^\alpha \partial_{\xi'}^{\beta'} p(x,\xi')| \leqslant C(1 + |\xi'|)^{m - |\beta'| + \frac{\alpha_n}{2} - \frac{M}{2}}$$

pour tous $x \in K$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Alors en s'inspirant de certains travaux de L. Boutet de Monvel [5] et de F. Trèves [15] et en utilisant quelques résultats de P. Bolley-J. Camus-B. Helffer [4] on montre ([7] ou [8]) :

Théorème 1 : (Noyau de Poisson)

Sous les hypothèses $(H_o)'$, $(H_1)'$ et $(H_2)'$ il existe $\mathcal{P} \in \mathcal{K}^\circ$ tel que

$$\begin{cases} L\,\mathcal{P} \in \mathcal{L}(C^\mu_{comp}(\mathbb{R}^{n-1}),\ C^\infty(\bar{\mathbb{R}}^n_+)) \\ \gamma\,\mathcal{P} - I \in \mathcal{L}(C^\mu_{comp}(\mathbb{R}^{n-1}),\ C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})) \end{cases}$$

On a de plus,

Théorème 2 :

Un noyau de Poisson $\mathcal{P} \in \mathcal{K}^\circ(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ se prolonge, pour tous $\ell \in \mathbb{N}$ et $\mu \in]0,1[$, en un opérateur linéaire continu de $C^{\ell+1+\mu}_{comp}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $C^{\ell+1+\mu}_{x_n, loc}(\bar{\mathbb{R}}^n_+) = \{u \in C^{\ell+1+\mu}_{loc}(\bar{\mathbb{R}}^n_+);\ x_n^2\, u \in C^{\ell+2+\mu}_{loc}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ et $\partial^2_{x_n} u \in C^{\ell+\mu}_{loc}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$.

Pour démontrer le théorème 2, on étudie le noyau distribution $K(x',x_n,y')$ de $\mathcal{P}$ et on montre (cf [11]), en procédant un peu comme dans [7] ou [3], que $K(x',x_n,y') \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1})$ et se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} - \Delta$ où $\Delta = \{(x',o,y'),\ x' = y'\}$ et vérifie

(i) $\forall$ K compact $\subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leqslant 1$, $\exists\ C_K > 0$ tel que

$$|\partial_x^\alpha K(x',x_n,y')| \leqslant C_K(|x'-y'| + x_n^2)^{-n+1-|\alpha'| - \frac{\alpha_n}{2}}$$

pour tous $x' \in K$, $x_n \in]0,1[$, $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$

(ii) $\forall\, \chi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, la fonction $\int K(x',x_n,y')\, \chi(x'-y')dy'$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\overline{\mathbb{R}}^n_+$. De plus, $\forall\, R \geqslant 1$, $\forall\, K$ compact de $\mathbb{R}^{n-1}$, $\exists\, C > 0$ tel que $\forall\, \delta \in]0,R[$, $\forall\, x' \in K$ et $x_n \in]0,1[$

$$\left|\int_{\delta<|x'-y'|\leqslant R} K(x',x_n,y')dy'\right| \leqslant C$$

Nous obtenons par un découpage d'intégrales comme dans [14],

Théorème 3 :

Soit $K(x',x_n,y') \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} - \Delta)$ et vérifiant (i) et (ii) ci-dessus. Alors l'opérateur A défini par

$$A\, u(x) = \int K(x',x_n,y')\, u(y')\, dy'$$

se prolonge, pour tout $\mu \in]0,1[$, en un opérateur linéaire continu de $C^\mu_{comp}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $C^\mu_{loc}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$.

Par suite, du théorème 3, on déduit qu'un noyau de Poisson $\mathcal{P} \in \mathcal{K}^\circ(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ se prolonge en un opérateur linéaire continu de $C^\mu_{comp}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $C^\mu_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$. Et par "dérivation et intégrations par parties" on déduit le théorème 2.

On étudie maintenant le noyau de Green :

Noyau de Green :

On commence par prolonger les coefficients de l'opérateur L en des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ de sorte que la condition d'ellipticité (H_o) soit satisfaite pour tout $x_n \neq 0$. Soit alors $\sum$ la variété caractéristique associée à L ; vu l'hypothèse $(H_o)'$, $\sum = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\},\ x_n = \xi_n = 0\}$.

On notera $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ et on dira qu'on opérateur P sur $\mathbb{R}^n$ admet la propriété de transmission si pour tout $u \in C^\infty_{comp}(\overline{\Omega}), P(u°)|_\Omega \in C^\infty(\overline{\Omega})$; $u°$ désignant le prolongement de u à $\mathbb{R}^n$ par 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Et on notera par P^Ω l'opérateur $u \to P(u°)|_\Omega$.

En utilisant encore certains travaux de Boutet de Monvel [5] et [6] on montre [11].

Théorème 4 : (Noyau de Green)

Sous les hypothèses $(H_0)'$, $(H_1)'$ et $(H_2)'$ il existe $Q \in OPS^{-2,-2}(\mathbb{R}^n, \Sigma)$, possèdant la propriété de transmission et un opérateur d'Hermite $\mathcal{H} \in OP\mathcal{K}^{-1}(\mathbb{R}^n, \Sigma)$ tels que l'opérateur $\mathcal{G} = Q^\Omega - \mathcal{P}\gamma Q^\Omega + \mathcal{H}^\Omega$ vérifie

$$L\mathcal{G} - I \in \mathcal{L}(C^\mu_{comp}(\overline{\Omega}), C^\infty(\overline{\Omega}))$$

$$\gamma\mathcal{G} \in \mathcal{L}(C^\mu_{comp}(\overline{\Omega}), C^\infty(\Gamma))$$

($\mathcal{P}$ étant un noyau de Poisson appartenant à $\mathcal{K}^0$ proprement supporté associé à l'opérateur L).

De $(H_0)'$ et $(H_1)'$ on déduit que L est transversalement elliptique. Ceci permet de construire explicitement le symbole q de Q sous forme d'un développement asymptotique. Et alors on vérifie que q satisfait la "condition de transmission". Pour construire $\mathcal{H}$ on utilise une méthode un peu analogue à celle utilisée pour construire le noyau de Poisson.

Théorème 5 :

Le noyau de Green $\mathcal{G}$, défini ci-dessus, se prolonge pour $\ell \in \mathbb{N}$ et $\mu \in]0,1[$ en un opérateur linéaire continu de $C^{\ell+\mu}_{comp}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ dans $C^{\ell+1+\mu}_{x_n, loc}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$.

Remarque : On retrouve et on améliore, dans un cas particulier, un résultat de régularité Höldérienne à l'intérieur obtenu récemment par L. Rothschild-E. Stein [13].

Pour démontrer le théorème 5, on est amené à étudier essentiellement l'action des opérateurs $OPS^{-2,-2}(\mathbb{R}^n,\Sigma)$ sur les espaces de Hölder. En fait, on étudie les opérateurs $OPS^{-1,-2}(\mathbb{R}^n,\Sigma) \subset OPS^{o,o}(\mathbb{R}^n,\Sigma) \subset OPS^{o}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ et par dérivation on déduit le résultat pour les opérateurs $OPS^{-2,-2}(\mathbb{R}^n,\Sigma)$. Pour ceci on a besoin de faire une étude fine des noyaux distribution associés aux opérateurs $OPS^{-1,-2}(\mathbb{R}^n,\Sigma)$. Soit $\mathcal{K}(x,x-y)$ le noyau distribution associé à un opérateur $A \in OPS^{-1,-2}(\mathbb{R}^n,\Sigma)$ modulo un régularisant. Alors $\mathcal{K}(x,z) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ et vérifie (cf [11]).

(i) $\forall$ compact $K \subset \mathbb{R}^n$, $\exists\ C_K > 0$ tel que $\forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha'| + |\beta'| \leqslant 1$ et $\alpha_n + \beta_n = 1$ on ait

$$\left\{\begin{array}{l} |\partial^{\alpha'}_{x'}\ \partial^{\beta'}_{z'}\ \mathcal{K}(x,z)| \leqslant C_K(|z'| + z_n^2)^{-n+\frac{1}{2}-|\alpha'|-|\beta'|} \\ \\ |\partial^{\alpha_n}_{x_n}\ \partial^{\beta_n}_{z_n}\mathcal{K}(x,z)| \leqslant C_K(|z'| + z_n^2)^{-n}|\operatorname{Log}(|z'| + z_n^2)| \end{array}\right.$$

$\forall\ x \in K$ et $z \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

(ii) Il existe des fonctions $\mathcal{K}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\})$; $j = 1,\dots,n-1$, telles que $\mathcal{K} = \sum_{j=1}^{n-1} \partial_{z_j} \mathcal{K}_j$ et vérifiant pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que, pour tout $j = 1,\dots,n-1$,

$$|K_j(x,z)| \leqslant C_K(|z'| + z_n^2)^{-n+\frac{3}{2}}$$

pour tous $x \in K$ et $z \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Soit $\theta \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\theta = 1$ dans un voisinage de $z = 0$ et soit $K_\theta(x,.)$ la distribution sur $\mathbb{R}^n$ associé à $\mathcal{K}(x,.)$ défini pour $u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle K_\theta(x,.),u\rangle = \int \mathcal{K}(x,z)(u(z) - u(o)\theta(z))dz$$

Soit maintenant $\mathcal{K}_\theta$ l'opérateur défini sur $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\theta\ u(x) &= (K_\theta(x,.) * u)(x) \\ &= \int \mathcal{K}(x,z)(u(x-z) - u(x)\theta(z))dz \end{aligned}$$

Alors par un découpage d'intégrale nous obtenons (cf [11]) :

Théorème 6 :

L'opérateur $\mathcal{K}_\theta$, *défini ci-dessus, se prolonge pour tout* $\mu \in]0,1[$, *en un opérateur linéaire continu de* $C^{\mu}_{comp}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $C^{\mu}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Du théorème 6, on déduit que A se prolonge en un opérateur linéaire continu de $C^{\mu}_{comp}(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{\mu}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. En fait on a :

Théorème 7 :

Un opérateur $A \in OPS^{-1,-2}(\mathbb{R}^n, \Sigma)$, *se prolonge en un opérateur linéaire continu de* $C^{\mu}_{comp}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathcal{C}^{\mu}_{x_n, loc}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^{\mu}_{loc}(\mathbb{R}^n)\ ;$ $x_n^2\, u \in C^{1+\mu}_{loc}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)\}$.

Pour avoir le théorème 7, il reste à montrer que l'opérateur $B = x_n^2\, A$ se prolonge de $C^{\mu}_{comp}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $C^{1+\mu}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Pour ceci, on étudie le noyau distribution $\mathcal{K}(x,x-y)$ de l'opérateur $C = D^{\alpha}_x B$ avec $|\alpha| = 1$. On montre (cf [11]) que $\mathcal{K}(x,x-y)$ s'écrit essentiellement sous la forme :

$$\mathcal{K}(x,z) = \mathcal{K}_1(x,z) + \mathcal{K}_2(x,z)$$

avec $\mathcal{K}_1(x,z) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et vérifiant les propriétés (i) et (ii) précédentes et $\mathcal{K}_2(x,z) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et vérifiant :

(i)' $\forall$ compact $K \subset \mathbb{R}^n$, $\exists\, C_K > 0$ tel que $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1$ on ait

$$\begin{cases} |\mathcal{K}_2(x,z)| \leqslant C_K\, x_n^2 (|z'| + |x_n|\ |z_n|)^{-n-1} \\ |\partial^{\alpha}_x\, \partial^{\beta}_z\, \mathcal{K}_2(x,z)| \leqslant C_K |x_n|\ (|z'| + |x_n|\ |z_n|)^{-n-|\alpha|-|\beta|} \end{cases}$$

pour tous $x \in K$ avec $x_n \neq 0$ et $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii)' $\exists\, K_{2j}(x,z) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $j = 1,\dots,n-1$, telles que pour tout $j = 1,\dots,n-1$ on ait : $\forall$ compact $K \subset \mathbb{R}^n$, $\exists\, C_K > 0$ tel que :

$$|\mathcal{K}_{2j}(x,z)| \leq C_K |x_n| (|z'| + |x_n|\ |z_n|)^{-n+1}$$

$\forall\ x \in K,\ x_n \neq 0$ et $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Soit, comme précédemment, $\mathcal{K}_{2\theta}$ l'opérateur associé à $\mathcal{K}_2(x,z)$. Alors on déduit le théorème 7 du théorème 6 et du théorème 8 suivant (cf [11]) :

Théorème 8 : L'opérateur $\mathcal{K}_{2\theta}$ se prolonge, pour tout $\mu \in]0,1[$, en un opérateur linéaire continu de $C^{\mu}_{comp}(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{\mu}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Par suite, par "dérivation et intégration par parties" on montre qu'un opérateur $Q \in OPS^{-2,-2}(\mathbb{R}^n,\Sigma)$, à fortiori un opérateur d'Hermite $H \in OP\mathcal{H}^{-1}(\mathbb{R}^n,\Sigma)$, se prolonge, pour tous $\ell \in \mathbb{N}$ et $\mu \in]0,1[$, en un opérateur linéaire continu de $C^{\ell+\mu}_{comp}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}^{\ell+1+\mu}_{x_n,loc}(\mathbb{R}^n)$. Si de plus Q possède la propriété de transmission, Q^{Ω} se prolonge, pour tous $\ell \in \mathbb{N}$ et μ $]0,1[$ en un opérateur linéaire continu de $C^{\ell+\mu}_{comp}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ dans $\mathcal{C}^{\ell+1+\mu}_{x_n,loc}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$. Mais si H est un opérateur d'Hermite appartenant à $OP\mathcal{H}^{-1}(\mathbb{R}^n,\Sigma)$, H^{Ω} se prolonge toujours en un opérateur linéaire continu de $C^{\ell+\mu}_{comp}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ dans $C^{\ell+1+\mu}_{x_n,loc}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$.

<u>Exemple</u> :

Considérons dans $\mathbb{R}^2$, l'opérateur $L_\lambda = D_t^2 + t^2 D_x^2 + \lambda D_x$ avec $\lambda \neq -2k+1$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ ([14] et [9]). Alors on a pour $\ell \in \mathbb{N}$ et $\mu \in]0,1[$, pour $f \in C^{\ell+\mu}_{comp}(\bar{\mathbb{R}}^2_+)$ et $\psi \in C^{\ell+1+\mu}_{comp}(\mathbb{R})$ si $u \in H^s_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$, $s > \frac{1}{2}$ est solution du problème du Dirichlet :

$$\begin{cases} L_\lambda u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2_+ \\ \gamma\ u = \psi \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

alors $u \in C^{\ell+1+\mu}_{x_n,loc}(\bar{\mathbb{R}}^2_+) = \{u \in C^{\ell+1+\mu}_{loc}(\bar{\mathbb{R}}^2_+) / \partial_t^2 u \in C^{\ell+\mu}_{loc}(\bar{\mathbb{R}}^2_+)$ et $t^2 u \in C^{\ell+2+\mu}_{loc}(\bar{\mathbb{R}}^2_+)\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] : S. AGMON - A. DOUGLIS - L. NIRENBERG : "Estimates near the Boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I*. Comm. on pure and applied math, Vol XII, 623-727 (1959).

[2] : M.S. BAOUENDI : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés". Bull. Soc. Math. France, 95 (1967) pp. 45-87.

[3] : M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC - G. METIVIER : "Kernels and symbols of Analytic pseudodifferential operators". Journal of differential equations 48, 227-240 (1983).

[4] : P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HELFFER : "Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques". J. Math. Pures et Appl., 56, 1976, p. 131-171.

[5] : L. BOUTET DE MONVEL : "Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord". J. Anal. Math. 17, 1966.

[6] : L. BOUTET DE MONVEL : "Hypoelliptic operators with double caracteristics and related pseudodifferential operators". Comm. on pure and applied, math., vol. 27, 1974.

[7] : R.R. COIFMAN - Y. MEYER : "Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels". Astérisque 57, 1978.

[8] : M. DAMLAKHI : Thèse, Orsay 1982.

[9] : O. DEBBAJ : "Indice de certains problèmes à dérivée oblique associés à des opérateurs elliptiques singuliers". Thèse de 3ème Cycle, Rennes, Mars 1979.

[10] : O. DEBBAJ - A. SOUISSI : "Problème à dérivée oblique associé à des opérateurs elliptiques singuliers". Coll. E.D.P. de St Cast, 1979.

[11] : O. DEBBAJ : " Régularité Höldérienne de certains problèmes aux limites singuliers". Thèse. Rennes (1983).

[12] : C. GOULAOUIC - N. SHIMAKURA : "Régularité Höldérienne de certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés". Coll. E.D.P. St Jean de Monts, 1981.

[13] : L. ROTHSCHILD - E.M. STEIN : "Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups". Acta Mathematica 137, 248-315.

[14] : E.M. STEIN : "Singular integrals and differentiability properties of functions". Princeton University Press Princeton, New-Jersey, 1970

[15] : F. TREVES : "Parametrix of generalised heat equations applied to the regularity up to the boundary of elliptic boundary value problems". (Rutgers University 1976).

[16] : M.I. VIŠIK - V.V. GRUŠIN : "On class of higher degenerate elliptic equations". Math. U.S.S.R. Sbornik, Vol. 8 (1969) N° 1.