JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD HELFFER
JOHANNES SJÖSTRAND

Puits multiples pour l'équation de Schrödinger

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A18_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PUITS MULTIPLES POUR L'EQUATION DE SCHRÖDINGER

par

B.HELFFER - J.SJÖSTRAND

1.THEORIE GENERALE

Soit M une variété riemannienne compacte ou bien $M = \mathbb{R}^n$. Soit $V \in C^\infty(M;\mathbb{R})$, $P = -h^2\Delta + V(x)$, où Δ est le Laplacien sur M. On s'intéresse au comportement asymptotique du spectre de P quand $h \to 0$, $h > 0$, près d'un niveau d'énergie E_o donné. Dans le cas $M = \mathbb{R}^n$ on suppose que

$$\varliminf_{|x|\to\infty} V(x) > E_o$$

On dénote aussi par P l'extension de Friedrichs. Quitte à remplacer V par $V - E_o$ on peut supposer que $E_o = 0$. Si $0 < a < \underline{\lim}\ V$ (ou simplement $a > 0$ dans le cas où M est compact) on sait que le spectre de P dans $]-\infty, a]$ est discret et qu'il existe $N_o > 0$ tel que le nombre de valeurs propres de P dans l'intervalle $]-\infty, a]$ est (h^{-N_o}). On appelle $U_1,\dots,U_N$ des puits si $U_1 \dots U_N$ sont compacts disjoints et $U_1 \cup \dots \cup U_N = \{x \in M;\ V(x) \leq 0\}$. Le lien entre les puits et le spectre a été étudié par des nombreux auteurs [2,3,4,6] .

On sait que les fonctions propres associées à des valeurs propres proches de 0 sont concentrées près des puits. Utilisant les estimations (de Carleman assez élémentaires) de Agmon [1] , on obtient une forme géométriquement agréable de ce résultat comme suit :

Soit dx^2 la métrique sur M. On introduit alors la métrique d'Agmon: $\max(V,0)dx^2$ et on désigne par $d(x,y)$ la distance associée. Si $\Psi(x) = \min d(x,U_j)$ et si $u = u_h \in \mathcal{D}_P$ est une famille avec $\|u\|_{L^2} = 1$, $\overline{Pu} = \lambda u$, $\lambda = \lambda_h^j \to 0$, $h \to 0$ alors

$$(1) \qquad \|\nabla(e^{\Psi/h} u)\|_{L^2(K)} + \|e^{\Psi/h} u\|_{L^2(K)} = O(e^{o(1)/h})$$

pour tout compact $K \subseteq M$. Cette estimation reste valable dans le cas où M est une variété compacte avec bord.(P est alors la réalisation de Dirichlet).

A chaque puits on associe un spectre approché de la manière suivante : Soit $S_o = \min_{j\neq k} d(U_j,U_k) > 0$ et prenons $S \in]\frac{S_o}{2}, S_o[$ proche de S_o. On peut alors trouver $M_j \subseteq M$ compacts avec bord C^∞ tels que

$$(2) \qquad \overline{B(U_j,S)} \subset \overset{o}{M}_j \ , \quad M_j \cap U_k = \phi \quad \text{si } j \neq k.$$

Ici $B(U_j,S) := \{x \in M;\ d(x,U_j) < S\}$. Soit P_{M_j} la réalisation de Dirichlet de P dans $L^2(M_j)$. On peut montrer que $Sp(P_{M_j})$ près de 0 ne change pas modulo des déplacements $= O(e^{-2S/h})$ si l'on modifie le choix de M_j. Notre problème est maintenant d'étudier le lien entre $Sp(P)$ et $Sp(P_{M_j})$ près de 0. Les différents spectres ont une densité au plus polynomiale près de 0 quand $h \to 0$ et on se fixe maintenant des objets suivants .

1°) Un ensemble $J \subseteq]0,1]$ avec $0 \in \bar{J}$

2°) Des applications

$$J \ni h \begin{cases} \to I(h) : \text{intervalle fermé avec } I(h) \to 0,\ h \to 0 \\ \to a(h) > 0 \text{ avec } |\log a(h)| = O(1/h),\ h \to 0 \end{cases}$$

Si $I(h) = [\alpha(h), \beta(h)]$ alors on suppose que les intervalles $[\alpha(h)-a(h),\alpha(h)[$ et $]\beta(h),\beta(h) + a(h)]$ ne rencontrent pas $Sp(P)$ et $Sp(P_{M_j})$, $j = 1,\dots,N$.

Soient alors

$\lambda_1,\dots,\lambda_M$ les valeurs propres de P dans $I(h)$

$\mu_{j,1},\dots\mu_{j,m_j}$ les valeurs propres de P_{M_j} dans $I(h)$

et $u_1,\dots,u_M \in L^2(M)$, $\varphi_{j,1},\dots,\varphi_{j,m_j} \in L^2(M_j)$ des familles O.N. correspondantes. Alors :

$$(\tilde{1}) \qquad \|\nabla(e^{\Psi_j/h}\varphi_{j,k})\|_{L^2(M_j)} + \|e^{\Psi_j/h}\varphi_{j,k}\|_{L^2(M_j)} = O(e^{o(1)/h})$$

où $\Psi_j(x) = d(x,U_j)$. Soient $\chi_j \in C_o^\infty(\overset{o}{M}_j)$, $\chi_j = 1$ dans un voisinage de $\overline{B(U_j,S)}$.

Alors, si $\Psi_{j,k} = \chi_j \varphi_{j,k}$ on a :

$$P\Psi_{j,k} = \mu_{j,k} \Psi_{j,k} + O(e^{-S/h}) \quad \text{dans} \quad L^2(M).$$

Soit $F = (u_1,\dots,u_M)$ le sous-espace engendré par les vraies fonctions propres et $E = (\Psi_{1,1},\dots,\Psi_{N,m_N})$ celui engendré par les fonctions propres approchées.

Proposition 1. Pour h *suffisamment petit, on a* $M = m_1+\dots+m_N$, $\mathrm{dist}(E,F) = O(e^{-S/h})$. *Il y a une bijection* $b : Sp(P)\cap I(h) \to I(h)\cap \bigcup_1^N Sp(P_{M_j})$ *telle que* $b(\lambda) - \lambda = O(e^{-S/h})$, $\forall \lambda \in Sp(P) \cap I(h)$.

Montrons maintenant comment calculer les λ_j modulo $O(e^{-2S/h})$ si les $\mu_{i,k}$ et les $\Psi_{j,k}$ sont connus. Soit π_o le projecteur sur E le long de $F^\perp$. Alors $\pi_o|_F : F \to E$ est inversible d'inverse $\pi_F|_E : E \to F$ si π_F est le projecteur orthogonal sur F. Puisque F et $F^\perp$ sont stables pour P, on peut identifier $P/_F$ avec $\pi_o P/_E$. Ecrivons maintenant $\alpha = (j,k)$, $j(\alpha) = j$.

Théorème 2 : La matrice de $\pi_o P|_E$ *pour la base* (Ψ_α) *est*

$$\mathrm{diag}(\mu_\alpha) + (w_{\alpha,\beta}) + O(e^{-2S/h}),$$

où

$$w_{\alpha,\beta} = h^2 \int \chi_{j(\alpha)} (\varphi_\beta \nabla \varphi_\alpha - \varphi_\alpha \nabla \varphi_\beta) \nabla \chi_{j(\beta)} dx$$

Esquisse de la démonstration . On montre d'abord que $\|\pi_o - \pi_E\| = O(e^{-S/h})$, $\|\pi_E - \tau\| = O(e^{-S/h})$ où π_E est le projecteur orthogonal sur E et

$$\tau u = \sum_\alpha (u|\Psi_\alpha)\Psi_\alpha .$$

Alors

$$P(\Psi_\beta) = \mu_\beta \Psi_\beta - h^2(2\nabla \chi_{j(\beta)} \nabla\varphi_\beta + (\Delta\chi_{j(\beta)})\varphi_\beta) .$$

Le dernier terme est $O(e^{-S/h})$, donc modulo $O(e^{-2S/h})$.

On obtient :

$$\pi_o P(\Psi_\beta) \equiv \mu_\beta \Psi_\beta - h^2 \tau(2\nabla\chi_{j(\beta)} \Delta\varphi_\beta + (\Delta\chi_{j(\beta)})\varphi_\beta)$$

$$= \mu_\beta \Psi_\beta - h^2 \sum_\alpha \Psi_\alpha \int 2 \nabla\chi_{j(\beta)} \nabla\varphi_\beta \chi_{j(\alpha)} \varphi_\alpha + \Delta\chi_{j(\beta)} \varphi_\beta \chi_{j(\alpha)} \varphi_\alpha \, dx$$

$$\equiv \mu_\beta \Psi_\beta + h^2 \sum_\alpha \Psi_\alpha \int \chi_{j(\alpha)} (\varphi_\beta \nabla\varphi_\alpha - \varphi_\alpha \nabla\varphi_\beta) \nabla \chi_{j(\beta)} \, dx .$$

La base (Ψ_α) n'est pas tout à fait O.N. . Si l'on l'orthonormalise (à l'aide de la racine carré de la matrice $((\Psi_\alpha | \Psi_\beta))$, la matrice de $\pi_o P|_E$ dans la nouvelle base devient

$$(3) \qquad \mathrm{diag}(\mu_\alpha) + (\hat{w}_{\alpha,\beta}) + (e^{-2S/h}) ,$$

où $\hat{w}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(w_{\alpha.\beta} + w_{\beta,\alpha})$. Transportant la nouvelle base à F à l'aide de π_F, ensuite après une nouvelle orthonormalisation on trouve que la matrice de $P|_F$ est aussi de la forme (3). Il est alors facile d'obtenir :

Corollaire 3. Il y a une bijection b : $\mathrm{Sp}(\mathrm{diag}(\mu_\alpha) + (\hat{w}_{\alpha,\beta}))$ $\longrightarrow$ $\mathrm{Sp}(P) \cap I(h)$, *telle que* $b(\lambda) - \lambda = O(e^{-2S/h})$.

On remarque que $\hat{w}_{\alpha,\beta} = O(\exp - \frac{1}{h}(S_o - O(1))$, donc la matrice d'intéraction donnera des corrections intéressantes des μ_α seulement dans le cas ou les μ_α sont déjà exponentiellement proches entre eux. Dans ce cas, si $d(U_\alpha, U_\beta) = S_o$ et Γ une hypersurface " convenable " qui " sépare " U_α et U_β on trouve

$$(4) \qquad \hat{w}_{\alpha,\beta} = h^2 \int_\Gamma \varphi_\alpha \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial h} - \varphi_\beta \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial h} \, dS + O(e^{-(S_o+a)/h})$$

où $a > 0$ et h est la normale de Γ orienté vers U_α .
Ces Wronshiens généralisés apparaissent dans le travail de Harrell [2].

2. LE CAS DES MINIMA NON-DEGENERES.

On suppose maintenant les U_j ponctuels, $U_j = \{x_j\}$, $V(x_j) = 0$.

On suppose également que $V''(x_j) > 0$. Fixons d'abord un j. On peut alors associer à (P,x_j) un oscillateur harmonique (qui est égal à $-\Delta+\frac{1}{2}\langle V''(x_j)x,x\rangle$ dans le cas $M = \mathbb{R}^n$). Si $E_o \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de multiplicité d de cet oscillateur et si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, alors P_{M_j} admet exactement d valeurs propres dans l'intervalle $[(E_o-\varepsilon)h, (E_o+\varepsilon)h]$ (comptées avec multiplicité) et chaque valeur propre admet au développement asymptotique

$$(5) \qquad \mu \sim h(E_o + E_1 h^{1/2} + E_2 h + \ldots)$$

Ceci a été démontré essentiellement par B.Simon [5] (Dans [5] on élimine les puissances fractionnaires par un argument pas tout à fait correct et en effet il est facile de construire un exemple où par exemple E_1 est $\neq 0$). Dans le cas où V est réel analytique, on peut montrer que la somme asymptotique dans [5] est un symbole analytique formel et que μ est une réalisation de ce symbole au sens de [7]. D'après des communications indirectes, F.Pham à également obtenu ce résultat dans le cas de dimension 1.

Pour obtenir la matrice d'intéraction il nous faut plus :

Soit $\Omega_j \subset M_j$ un voisinage ouvert de x_j tel que chaque point $x \in \Omega_j$ est relié à x_j par une géodésique minimale unique (pour la métrique d'Agmon) qui reste dans Ω_j. Alors $\Psi_j(x) = d(x_i x_j)$ est de classe C^∞ (et même analytique dans le cas analytique) dans Ω_j . Si la valeur propre M est asymptotiquement simple (c.a.d. que μ est de multiplicité 1 et toutes les autres valeurs propres ont des développements asymptotiques différents) alors la fonction propre normalisée associée à μ est de la forme

$$(6) \qquad a(x,h)e^{-\Psi_j(x)/h}$$

dans Ω_j où a est un symbole (et même un symbole analytique dans le cas où V est analytique)

Pour un développement asymptotique donné comme dans [5] supposons que pour chaque j on ait une valeur propre unique μ_j avec ce développement asymptotique. (On peut aussi traiter le cas des valeurs propres uniques). On peut choisir les Ω_j tels que toute géodésique minimale, reliant deux puits U_j et U_k avec $d(U_j, U_k) = S_o$ est continue dans $\Omega_j \cup \Omega_k$.

On choisit maintenant $I(h) = [\mu_1(h) - h^{N_o}, \mu_1(h)+h^{N_o}]$ avec N_o suffisamment grand. Alors le théorème 2 et le corollaire 3 s'appliquent. De plus si $j(\alpha) = j$, $j(p) = k$, $d(U_j, U_k) = S_o$ alors on peut trouver $\Gamma \subset \Omega_j \cap \Omega_k$ telle que (4) est valable, à ceci près que dans le cas C^∞ il faut remplacer le reste $O(e^{-S_o+a)/h})$ par $O(e^{-S_o/h}\, h^N)$, $\forall N$.

Avec une hypothèse en plus on peut développer les intégrales dans (4) par la méthode de la phase stationnaire et on obtient :

Théorème 4. On garde les hypothèses ci-dessus et on suppose que si $d(U_j,U_k)=S_o$ *alors il existe une géodésique minimale unique* $\gamma_{j,k}$ *reliant* U_j et U_k. *On suppose aussi que si* X_o *est un point à l'intérieur de* $\gamma_{j,k}$ *et* Γ *une Hypersurface qui coupe* $\gamma_{j,k}$ *transversalement en* X_o *alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$d(X,U_j) + d(X,U_k) \geq S_o + \frac{1}{C}\, d(X,X_o)^2$$

pour tout $X \in \Gamma$ *dans un voisinage de* X_o.

Alors (identifiant α *avec* $j(\alpha)$*) si* $d(U_j,U_k) = S_o$ *on a*

$$\hat{w}_{j,k} = a_{j,k}(h)\, e^{-S_o/h}$$

où $a_{\alpha,\beta}$ *admet un développement asymptotique en puissances de* $h^{1/2}$.

Dans le cas analytique $a_{\alpha,\beta}$ *est la réalisation d'un symbole analytique formel. Dans le cas où* E_o *est la valeur propre principale pour chaque oscillateur harmonique localisé, alors les développements de* $a_{\alpha,\beta}$ *sont des symboles elliptiques de degré* $1/2$ *en* h *et* $a_{\alpha,\beta} < 0$.

Dans des cas où il y a un groupe d'isométries qui agit sur M et qui laisse V invariant on trouve des propriétés d'invariance analogues pour la matrice d'intéraction et si par exemple le groupe agit transitivement alors les μ_j coincident et on arrive à calculer les valeurs propres corrigées Voir [O] .

BIBLIOGRAPHIE

[0] : B.HELFFER - S.JOSTRAND : Préprint et travaux en préparation.

[1] : S.AGMON : Mathematical Notes 29, Princeton University Press.

[2] : E.M.HARRELL : Comm. Math.Phys.75(1980), 239-261

[3] : B.HELFFER - D.ROBERT : Puits de potentiel et asymptotique semi-classique, Preprint.

[4] : G.JONA-LASINIO-F.MARTINELLI-E.SCOPPOLA : Comm. Math.Phy. 80(1981), 223-254.

[5] : B.SIMON : Semi-classical analysis of low lying ligen values I, Preprint.

[6] : B.SIMON : Instantons, double wells and large deviations, C B M S conférence at S I U, preprint.

[7] : J.JOSTRAND : Astérisque n° 95.