

H. BAHOURI

**Sur la propriété de prolongement unique pour les opérateurs de Hörmander**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1983), p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1983\\_\\_\\_A15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983___A15_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA PROPRIÉTÉ DE PROLONGEMENT UNIQUE

POUR LES OPÉRATEURS D'HORMANDER

H. Bahouri

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique  
Plateau de Palaiseau 91128 Palaiseau Cedex (France)

INTRODUCTION

Dans ce travail, on s'intéresse aux "opérateurs de Hörmander" [10]  $P = \sum X_j^2$ , où l'algèbre de Lie engendrée par les  $X_j$  est de rang maximum en tout point. Bony [5] a montré que, dans le cas analytique, le prolongement des solutions de ces opérateurs est unique. Par ailleurs, Watanabe [14] a obtenu le même résultat, dans le cas  $C^\infty$ , en dimension deux. En ce qui nous concerne, nous montrerons que ce résultat n'est plus vrai dès que la dimension est supérieure ou égale à trois. En particulier, en dimension trois ou quatre, nous établirons que ces opérateurs ne possèdent jamais la propriété de prolongement unique. (Evidemment, en supposant que ces opérateurs ne sont elliptiques en aucun point de l'espace).

Les hypothèses des résultats que nous énoncerons au paragraphe 1, sont invariantes, et reposent sur des propriétés

algébriques et géométriques de l'opérateur. La preuve de ces résultats, cf. à [2], [3], [6], est fondée sur des techniques, introduites par Pliš [12-13], pour être ensuite améliorées par Hörmander [8-9], qui sont en liaison avec la méthode de l'optique géométrique.

C'est à S. Alinhac que je dois de m'être intéressée à cette question. Je l'en remercie vivement. Je tiens également à remercier Jean-Pierre Bourguignons pour les précieux conseils qu'il m'a prodigués.

### 1. GENERALITES ET RESULTATS

Dans toute la suite,  $P(x, D_x)$  (où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ ) désignera un opérateur différentiel écrit sous la forme :

$$(1.1) \quad P(x, D_x) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2(x, D_x) + p_1(x, D_x)$$

où

(1.2) Les  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , sont des champs de vecteurs réels, à coefficients  $C^\infty$  dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ .

(1.3) L'espace vectoriel engendré par les  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , est de dimension  $n-1$  en tout point de  $\Omega$ .

(1.4) L'algèbre de Lie engendrée par les  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , est de rang  $n$  en tout point de  $\Omega$ .

(1.5)  $p_1$  est un opérateur différentiel d'ordre un à coefficients  $C^\infty$  dans  $\Omega$ .

Nous dirons que  $P$  possède la propriété de prolongement unique dans un ouvert  $V \subset \Omega$  si :

$u \in C^\infty(V)$ , et  $Pu = 0$  dans  $V$  impliquent  $u \equiv 0$  dans  $V$  dès que  $u = 0$  près d'un point de  $v$ .

Et nous désignerons par  $\varepsilon_n$  la forme volume associée aux champs  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , qui à tout champ de vecteur  $X$ , réel  $C^\infty$  dans  $\Omega$ , associe  $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_{n-1} \wedge X = \det(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X)$

Le résultat principal que nous obtenons est le :

Théorème 1.1 : Soit  $P(x, Dx)$  un opérateur différentiel vérifiant (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5), on suppose que :

(1.6) La forme volume associée aux  $X_i$  est de classe constante 4 au voisinage d'un point  $x_0$  de  $\Omega$ .

Alors, dans tout voisinage de  $x_0$ , il existe un ouvert  $V$  et une fonction  $a \in C^\infty(V)$  telle que  $P_+ a$  n'a pas la propriété de prolongement unique dans  $V$ .

De cet énoncé, on déduit les :

Corollaire 1.2 : En dimension 3 ou 4, la conclusion du théorème 1.1 reste vraie sans l'hypothèses (1.6).

Corollaire 1.3 : Soit  $P(x, Dx) = \sum_{i=1}^p X_i^2(x, Dx) + p_1(x, Dx)$  tel que  $p < m-1$ , la conclusion du théorème 1.1 reste vraie s'il existe  $X_{p+1}, \dots, X_{n-1}$  tels que les  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , et  $p_1$  vérifient (1.1) ... (1.6).

Exemples et remarques :

(1.7) Le fait que la dimension est supérieure ou égale à trois est important ; en effet, en dimension deux, Watanabe [14] a montré

que toute solution  $u$  dans  $C^\infty(\Omega)$  de  $Pu = 0$  est identiquement nulle dès qu'elle est nulle au voisinage d'un point, lorsque  $P$  vérifie la condition d'Hörmander [10]. Notons que (1.3) et (1.4) ne peuvent avoir lieu en même temps que si la dimension est supérieure ou égale à trois.

(1.8) Dire que la forme volume  $\xi_n$  est de classe 4 en  $x_0$ , équivaut à dire que  $\varepsilon_n \wedge d\varepsilon_n \neq 0$  en  $x_0$  et  $\varepsilon_n \wedge (d\varepsilon_n)^2 = 0$  en  $x_0$ . (Pour plus de détails, voir Abraham-Marsden [1] Godbillon [7] ou Malliavin [11]).

(1.9) Dire que la forme volume  $\varepsilon_n$  est de classe 2 revient à dire que les  $X_i$  forment un système de Frobenius. Le théorème montre qu'on sait traiter le cas qui vient après celui de Frobenius pour lequel la propriété de non prolongement unique est immédiate.

(1.10) Le fait que  $\xi_n$  soit de classe constante 4 est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une hypersurface  $S$  telle que les composantes tangentielles des  $X_i$  forment un système de Frobenius.

(1.11) Notons que l'on obtient le même résultat avec deux champs (resp. trois champs) dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant (1.2), (1.3) et (1.4) (même preuve que le théorème 1.1, voir même plus simple).

(1.12) Notons que dans le cas où l'on considère plus que  $n-1$  champs de vecteurs réels sur  $\mathbb{R}^n$ , vérifiant (1.2) et (1.4), nous disposons (à part, le cas trivial des opérateurs elliptiques) de plusieurs exemples dûs à Watanabe [14], Bahouri [4], possédant la propriété du prolongement unique, à savoir ;  $\partial_1^2 + x_1^{2k} \partial_2^2$  en dimension 2, où  $k$  est un entier positif  $\partial_1^2 + \partial_2^2 + x_1^2 \partial_3^2$  en dimen-

sion 3.

Plus généralement, on peut montrer que tout opérateur d'Hörmander elliptique hors d'une hypersurface, possède la propriété de prolongement unique.

(1.13) L'opérateur  $\partial_1^2 + (\partial_2 + x_1 \partial_3)^2$ , en dimension 3, vérifie les hypothèses du théorème 1.1 et n'admet pas l'unicité de Cauchy par rapport à la surface  $S : \{x_1 = 0\}$ , dans le sens où, pour tout  $x_0 \in S$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^3$ , des fonctions  $a$  et  $u$  de classe  $C^\infty$  dans  $V$ ,  $\text{supp } a \subset \{x_1 \geq 0\}$ ,  $\text{supp } u \cap V = \{x_1 \geq 0\} \cap V$  et  $(\partial_1^2 + (\partial_2 + x_1 \partial_3)^2)u + au = 0$  dans  $V$ .

Plus généralement, dans  $\mathbb{R}^n$ , tout opérateur de la forme  $\partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_{n-2}^2 + (\partial_{n-1} + x_1 \partial_n)^2$  vérifie les hypothèses du théorème et n'admet pas l'unicité de Cauchy par rapport à la surface  $\{x_1 = 0\}$ .

L'exemple de l'opérateur  $\partial_1^2 + \partial_2^2 + (\partial_3 + a \partial_5)^2 + (\partial_4 + b \partial_5)^2$  vérifie les hypothèses du théorème 1.1 lorsqu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^5$  tel que  $a_{x_1}(x_0) \neq 0$  ou  $b_{x_1}(x_0) \neq 0$  ou  $a_{x_2}(x_0) \neq 0$  ou  $b_{x_2}(x_0) \neq 0$  et  $a_{x_1 x_2} \equiv a_{x_2 x_1}$  au voisinage de  $x_0$ .

Enfin, l'opérateur  $\partial_1^2 + (\partial_2 + x_1 \partial_3 + \dots + x_1^{j-2} \partial_j + \dots + x_1^{n-2} \partial_n)^2$  ne vérifie pas les hypothèses du théorème 1.1 mais reste dans le cadre de la remarque (1.11) et donc ne possède pas la propriété de prolongement unique. On montre facilement qu'il n'admet pas l'unicité du problème de Cauchy par rapport à la surface  $\{x_1 = 0\}$ , dans le sens indiqué ci-dessus.

Bibliographie

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden : Foundations of Mechanics.  
The Benjamin, Cummings Publishing Company.
- [2] S. Alinhac : Non unicité du problème de Cauchy pour des  
opérateurs de type principal. Sem. Goulaouic-Schwartz, exposé  
n° 16, Ecole Polytechnique Paris (Mars 1981).
- [3] S. Alinhac, C. Zuily : Unicité et non unicité du problème  
de Cauchy pour des opérateurs à caractéristiques doubles.  
Comm. in P.D.E. 6(7) 799-828 (1981).
- [4] H. Bahouri : Unicité et non unicité du problème de Cauchy  
pour des opérateurs à symbole principal réel. Thèse de 3ème  
cycle à Orsay (1982) et article à paraître.
- [5] J. M. Bony : Principe du maximum, inégalité de Harnack  
et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs ellipti-  
ques dégénérés. Ann. Inst. Fourier, Grenoble (1969) 277-304.
- [6] P. Cohen : The non uniqueness of the Cauchy problem .  
O.N. Techn. Report 93, Stanford 1960.
- [7] C. Godbillon : Géométrie différentielle et mécanique  
analytique. Hermann.
- [8] L. Hörmander : Linear partial differential operators.  
Springer Verlag 1963.
- [9] L. Hörmander : Non uniqueness for the Cauchy problem. Lecture  
Notes in Math. Springer Verlag, n° 459 (1975) 36-72.

- [10] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math. Uppsala, 119 (1967) 147-171.
- [11] P. Malliavin : Géométrie différentielle intrinsèque. Hermann.
- [12] A. Pliš : The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations. Bull. Acad. Pol. Sci. 2 (1954) 55-57.
- [13] A. Pliš : Non uniqueness in Cauchy's problem for differential equations of elliptic type. J. Math. Mech. 9 (1960) 557-562.
- [14] K. Watanabe : L'unicité du prolongement des solutions elliptiques dégénérées. Tohoku Math. Journal 34 (1982) 239-249.

\*  
\* \*  
\*