Journées Équations aux dérivées partielles

André Unterberger

Julianne Unterberger

Le calcul pseudo-différentiel attaché au groupe des transformations du demi-plan de Poincaré

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A13_0>

Conférence n° 13

LE CALCUL PSEUDO-DIFFERENTIEL ATTACHE AU GROUPE DES TRANSFORMATIONS DU DEMI-PLAN DE POINCARE

par André et Julianne UNTERBERGER

1. INTRODUCTION

On peut (ce n'est pas obligatoire) poser le problème de la quantification en les termes suivants : associer, à des groupes de transformations unitaires aussi variés que possible, un calcul des opérateurs pseudo-différentiels modelé sur celui construit, sur $\mathbb{R}^n$, par la formule de H. Weyl, et en possédant l'essentiel des propriétés les plus remarquables. Nous allons donc commencer par dresser une liste de ces dernières.

Les ingrédients de base du calcul de Weyl sont les suivants :

a) un espace de Hilbert, ici $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ étant parfois appelé l'espace de configuration,

b) un espace de phase $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, muni de la forme symplectique $[\ ,\ ]$ définie par

$$[(x,\xi),(y,\eta)] = -\langle x,\eta\rangle + \langle y,\xi\rangle \ ;$$

le groupe des transformations linéaires de l'espace de phase qui conservent cette forme s'appelle le groupe symplectique $Sp(n,\mathbb{R})$

c) un groupe $Mp(n)$ de transformations unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$ appelé groupe métaplectique, et un homomorphisme canonique (dont le noyau a deux éléments) $M \mapsto \tilde{M}$ de $Mp(n)$ sur $Sp(n,\mathbb{R})$.

Les symboles sont les distributions tempérées sur l'espace de phase. La formule de Weyl

$$(1) \qquad (Op(a)u)(x) = \iint a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) e^{2i\pi\langle x-y,\xi\rangle} u(y)\, dy\, d\xi$$

établit une bijection entre l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ des symboles a et l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ des opérateurs Op(a) linéaires continus de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: cette correspondance se restreint en une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ sur l'espace de Hilbert des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, et l'on a par ailleurs la formule Trace $(Op(a)) = \int a(X)\,dX$ toutes les fois que les deux membres ont un sens. Enfin et surtout, on a la formule métaplectique (de I. Segal) :

pour tout symbole a et toute transformation métaplectique M, les opérateurs $M\,Op(a)M^{-1}$ et $Op(a \circ \tilde{M}^{-1})$ coïncident.

La description qui précède est un modèle pour ce qui va suivre. Dans [4] et [5], l'un des auteurs a proposé une théorie générale de la quantification sur des espaces hermitiens symétriques, qui s'applique en particulier au cas des domaines symétriques (de type complexe non-compact) d'Elie Cartan. Divers auteurs ont fait d'autres propositions. En particulier, la théorie de Berezin ([1] et [2]) suggère également de prendre des espaces complexes symétriques comme espaces de phase : en revanche, elle généralise non le calcul de Weyl des opérateurs mais celui de Wick ; on sait que ce dernier, d'ailleurs susceptible de diverses présentations, peut être considéré comme dérivant de celui de Weyl par une régularisation gaussienne convenable des symboles ; mais outre que l'on n'obtient ainsi qu'une classe très restreinte d'opérateurs, il est impossible de remonter du calcul de Wick à celui de Weyl puisque cela nécessiterait de résoudre des équations de la chaleur rétrogrades.

Introduisons, pour clarifier la formule de Weyl, les <u>symétries de phase</u> : à tout point $Y = (y,\eta)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est attaché l'opérateur unitaire σ_Y sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$(\sigma_Y u)(x) = u(2y - x)e^{4i\pi\langle x-y,\eta\rangle} . \tag{2}$$

Le nom est justifié par la propriété $\sigma_Y^2 = I$ et la formule

$$\sigma_Y\, Op(a)\, \sigma_Y = Op\,(X \mapsto a(2Y - X)) \tag{3}$$

valable pour tout symbole $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$.

La relation entre un symbole a et l'opérateur $A = Op(a)$ associé se traduit alors par les formules équivalentes

$$A = 2^n \int a(Y)\ \sigma_Y\, dY \tag{4}$$

et

$$a(Y) = 2^n\ \mathrm{Trace}\ (\sigma_Y A) . \tag{5}$$

En particulier, si φ et ψ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^n)$, la fonction de Wigner $H(\varphi,\psi)$ est le symbole de l'opérateur $u \mapsto (u,\psi)\varphi$; elle présente en outre la vertu que, pour tout opérateur A borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ de symbole a, on a

$$(A\varphi,\psi) = \int a(Y)\ H(\varphi,\psi;Y)\ dY\ .$$

Dans ce travail, on se limite au cas très particulier où l'espace de phase considéré est le demi-plan de Poincaré : on pourra consulter [4] pour une amorce de la théorie générale . Les formules (4) et (5) serviront de point de départ à une quantification de cet espace, c'est-à-dire à un correspondance linéaire Q entre des symboles et des opérateurs; mais, les formules n'étant plus, comme on le verra, réciproques l'une de l'autre, cette quantification Q ne jouera qu'un rôle provisoire.

2. LE DOMAINE DE POINCARE ET LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS UNITAIRES ASSOCIES

L'espace de phase est maintenant le demi-plan droit Π constitué des nombres complexes $Y = y + i\eta$ avec $y > 0$. Il est muni de sa structure canonique de variété complexe kählérienne, dont on note $d\mu\ (Y)$ $(= \frac{dy\ d\eta}{y^2})$ l'élément de mesure intrinsèque.

Le groupe des automorphismes de cet espace est le groupe $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{-1,1\}$ opérant sur Π par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (Y) = \frac{aY - bi}{icY + d}\ ;$$

l'emploi de coordonnées homogènes permet bien entendu de considérer ce groupe comme une version projective du groupe symplectique de plus basse dimension.

La théorie de la quantification décrite dans ce qui suit dépendra d'un paramètre réel $\lambda > 0$: toutes les constructions en dépendent, même lorsqu'on omettra de l'indiquer.

L'espace de Hilbert de la théorie est l'espace H_λ des classes (presque partout ...) de fonctions u mesurables sur $[0,\infty[$ à valeurs complexes, telles que

$$\|u\|^2_{H_\lambda} = \int_0^\infty |u(t)|^2\ t^{-\lambda}\, dt < \infty\ .$$

La transformation de Laplace $\mathcal{L}_\lambda$ définie par

$$(6) \qquad (\mathcal{L}_\lambda\ u)(X) = 2^\lambda\ \pi^{\lambda/2}(\Gamma(\lambda))^{-1/2} \int_0^\infty u(t)\, e^{-2\pi\bar{X}t}\, dt$$

identifie H_λ à l'espace de Hilbert des fonctions $\bar{f}$ antiholomorphes sur Π de carré sommable par rapport à la mesure $(\mathrm{Re}\,X)^{\lambda+1} d\mu(X)$. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ avec $c > 0$.

En choisissant pour $c\bar{X} + di$ $(X \in \Pi)$ un argument compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on peut poser

$$(\mathcal{M}\bar{f})(X) = e^{-i\pi\frac{\lambda+1}{2}}\,\bar{f}\left(\frac{aX - bi}{icX + d}\right)(c\bar{X} + di)^{-\lambda-1}.$$

En remontant à H_λ, on est conduit ainsi à attacher à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la transformation unitaire $M = M_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ définie par :

$$(7) \qquad (Mu)(s) = e^{-i\pi\frac{\lambda+1}{2}}\,\frac{2\pi}{c}\int_0^\infty u(t)\left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda/2}\left(\exp -2i\pi\frac{at + ds}{c}\right) I_\lambda\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{st}\right) dt,$$

où I_λ est la fonction de Bessel habituelle.

Lorsque $c = 0$, il conviendra de poser

$$(7') \qquad (Mu)(s) = |a|^{\lambda-1}\,u(a^{-2}s)\,\exp -2i\pi s\frac{b}{a}.$$

L'analogue du groupe métaplectique est le groupe $PMp(1,\lambda)$ constitué des transformations $\rho\, M_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, $c \geq 0$, ρ nombre complexe de module 1 arbitraire si λ est irrationnel, $\rho = e^{i\pi k/q}$ si $\frac{\lambda+1}{2}$ est la fraction irréductible $\frac{p}{q}$ (si λ est entier, on retrouve la série discrète de représentations de $SL(2,\mathbb{R})$). De plus, l'application $\rho\, M_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \mapsto$ classe de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $PSL(2,\mathbb{R})$ est un homomorphisme de $PMp(1,\lambda)$ sur $PSL(2,\mathbb{R})$ que l'on notera $M \mapsto \tilde{M}$.

3. LE GROUPE DES ROTATIONS AUTOUR DE 1 ; LA TRACE GENERALISEE

En attanchant à $\beta \in \mathbb{R}$ la transformation géométrique de Π définie par la matrice $\begin{pmatrix} \cos \beta/2 & \sin \beta/2 \\ -\sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix}$, on décrit le sous-groupe à un paramètre des rotations (non euclidiennes) autour de 1. En posant, avec les notations du paragraphe précédent,

$$R_\beta = M_{\begin{pmatrix} -\cos \beta/2 & -\sin \beta/2 \\ \sin \beta/2 & -\cos \beta/2 \end{pmatrix}}$$

lorsque $0 \leqslant \beta < 2\pi$, on définit le germe d'un groupe à un paramètre de transformations unitaires de H_λ (on étendra la définition à toute valeur de β en posant $R_{2k\pi} = e^{-i(\lambda+1)\pi k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$). En suivant les lignes indiquées dans [4], on peut écrire $R_\beta = \exp -i\beta L$ en explicitant le générateur L sous la forme de l'opérateur de Laguerre généralisé

$$L = -\frac{1}{4\pi}\, t\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + \frac{\lambda-1}{4\pi}\frac{d}{dt} + \pi t\,. \tag{8}$$

La décomposition spectrale de cet opérateur s'écrit sous la forme $u = \sum_{k \geqslant 0} (u, \psi_k)\left(\frac{\lambda+1}{2} + k\right) \psi_k$, avec

$$\psi_k(t) = (4\pi)^{\frac{\lambda+1}{2}} \left(\frac{k!}{\Gamma(\lambda+k+1)}\right)^{1/2} e^{-2\pi t}\, t^\lambda\, L_k^{(\lambda)}(4\pi t) \tag{9}$$

(voir [3] pour la définition des polynômes de Laguerre généralisés $L_k^{(\lambda)}$).

Il est nécessaire dans ce qui suit de définir la trace Tr A d'un opérateur A dans des conditions plus générales que les conditions usuelles : nous dirons qu'un opérateur A borné sur H_λ admet une trace généralisée si la trace (au sens usuel) de l'opérateur $A\, e^{-\varepsilon L}$ admet une limite quand $\varepsilon \to 0$: cette limite se notera Tr A.

Avec cette définition, $M_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ admet une trace généralisée pourvu que $\frac{|a+d|}{2} \neq 1$: si $c > 0$ et $\frac{|a+d|}{2} < 1$, on a

$$\operatorname{Tr} M_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\, e^{-i\pi\frac{\lambda+1}{2}} \left(1 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2\right)^{-1/2} \exp\left(-i\lambda \operatorname{Arc\,sin} \frac{a+d}{2}\right); \tag{10}$$

si $c > 0$ et $\frac{a+d}{2} > 1$, on a

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{Tr} M_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{1}{2} e^{-i\pi(\lambda+1)} \left(\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - 1\right)^{-1/2} \exp\left(-\lambda \operatorname{Arg ch} \frac{a+d}{2}\right).$$

4. SYMETRIES DE PHASE ; LA QUANTIFICATION Q

Pour tout $Y \in \Pi$ $(Y = y + i\eta)$, l'opérateur unitaire σ_Y est défini par

$$\text{(12)} \qquad (\sigma_Y u)(s) = 2\pi y \int_0^\infty e^{-2i\pi(s-t)\eta} \left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda/2} I_\lambda (4\pi y \sqrt{st}) u(t)\, dt$$

(ce n'est pas tout à fait l'opérateur attaché à la symétrie géométrique autour de Y : on a multiplié ce dernier opérateur par $e^{i\pi \frac{\lambda+1}{2}}$ pour le rendre autoadjoint).

Pour tout $a \in L^1(\Pi, d\mu)$, l'opérateur $Q(a)$ de symbole actif a est défini par

$$\text{(13)} \qquad Q(a) = 2 \int a(Y)\, \sigma_Y \, d\mu\, (Y).$$

On peut bien entendu expliciter le noyau de $Q(a)$ à l'aide de (12).

Au contraire, le symbole passif a d'un opérateur A est défini, lorsque cela a un sens, par la formule

$$\text{(14)} \qquad a(Y) = 2 \operatorname{Tr}(\sigma_Y A).$$

En particulier, les fonctions de Wigner passive $W(\varphi,\psi)$ et active $W^\#(\varphi,\psi)$ sont les symboles passif et actif de l'opérateur $u \longmapsto (u,\psi)\varphi$,et l'on a en particulier $W(\varphi,\psi)(Y) = 2(\sigma_Y \varphi,\psi)$. Voici quelques exemples :

a) si $m \neq \lambda, \lambda+2, \lambda+4, \ldots$ et $m \neq -\lambda-2, -\lambda-4, \ldots$, le symbole actif de la multiplication par t^m est

$$(2\pi)^{-m-1}\, y^{-m} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-m}{2}\right)} \qquad .$$

On voit d'emblée apparaître l'un des faits saillants de la théorie : les pôles de la fonction gamma empêchent certains opérateurs (certes non excellents , mais pas repoussants non plus) d'avoir des symboles ; au contraire, certains symboles sont incapables de définir des opérateurs en quelque sens que ce soit. On s'efforcera de remédier plus loin à cet état de fait.

b) posons, pour tout $X \in \Pi$, $X = x + i\xi$,

(15) $$\varphi_X(t) = \frac{(4\pi x)^{\frac{\lambda+1}{2}}}{(\Gamma(\lambda+1))^{1/2}} \, t^{\lambda} \, e^{-2\pi X t}$$

(de sorte que $\varphi_1 = \psi_o$ avec les notations du paragraphe précédent). Alors, quels que soient $X, Y, Z \in \Pi$, on a

(16) $$W(\varphi_X, \varphi_Z)(Y) = 2\left\{\frac{2y(xz)^{1/2}}{y^2 + (X-i\eta)(\bar{Z}+i\eta)}\right\}^{\lambda+1}$$

et

(17) $$W^{\#}(\varphi_X, \varphi_Z)(Y) = \frac{\lambda+1}{4\pi} (xz)^{\frac{\lambda+1}{2}} (X+\bar{Z}) \left\{\frac{2y}{y^2 + (X-i\eta)(\bar{Z}+i\eta)}\right\}^{\lambda+2}$$

En particulier

$$W(\varphi_X, \varphi_X)(Y) = 2(\mathrm{ch}\ d(X,Y))^{-(\lambda+1)} \qquad \text{et}$$

$$W^{\#}(\varphi_X, \varphi_X)(Y) = \frac{\lambda+1}{2\pi} (\mathrm{ch}\ d(X,Y))^{-(\lambda+2)}$$

où d est la distance hyperbolique sur Π .

c) Le symbole actif de l'opérateur de Laguerre L est la fonction $Y \longmapsto \frac{\lambda^2-1}{8\pi}\,\mathrm{ch}\ d(1,Y)$; son symbole passif est $\frac{\lambda}{2}\,\mathrm{ch}\ d(1,Y)$. Plus généralement, les symboles (actif ou passif) des fonctions acceptables de L sont les fonctions de $\mathrm{ch}\ d(1,Y)$.

5. RELATIONS ENTRE LES SYMBOLES ACTIF ET PASSIF

Par construction, les formules

$$M\,Q(a)M^{-1} = Q(a \circ \tilde{M}^{-1}) \qquad \text{et}$$

$$2\,\mathrm{Tr}(\sigma_Y\, M\, A\, M^{-1}) = 2\,\mathrm{Tr}(\sigma_{\tilde{M}^{-1}Y}\, A)$$

exprimant l'invariance à l'égard des transformations métaplectiques sont vérifiées. Mais les symboles actif et passif ne coïncident pas, et l'on n'a pas de formule simple pour la norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur.

<u>Théorème</u> : Posons

$$k(Y,Y') = 4\,\mathrm{Tr}(\sigma_Y\,\sigma_{Y'}) = \frac{4\,e^{-(\lambda+1)d(Y,Y')}}{1-e^{-2d(Y,Y')}}$$ et soit F_λ l'opérateur de noyau k : il est borné sur $L^2(\Pi,d\mu)$. De plus :

(i) $\quad \forall\,\varphi,\psi \in H_\lambda\,,\quad F_\lambda(W^\#(\varphi,\psi)) = W(\varphi,\psi)$

(ii) $$(4\pi)^{-2}(-y^2\Delta + \lambda(\lambda+1))F_\lambda\,F_{\lambda+1} = I$$

L'opérateur F_λ, faisant passer d'une fonction de Wigner active à la fonction de Wigner passive associée, exprime donc le lien entre les symboles actif et passif d'un même opérateur. La formule (ii) est une conséquence des formules (16) et (17), et offre une forme particulièrement simple de la résolvante de l'opérateur de Laplace-Beltrami $-y^2\Delta$ sur Π : ainsi la quantification d'un espace symétrique est-elle susceptible de contribuer éventuellement à l'analyse plus classique sur cet espace.

L'opérateur F_λ est borné sur $L^2(\Pi,d\mu)$, symétrique et, ainsi qu'on peut le vérifier, positif : soit $F_\lambda^{1/2}$ **sa racine carrée**; on peut également définir $F_\lambda^{1/2} = (4\pi)^{-2}F_\lambda^{1/2}(-y^2\Delta + \lambda(\lambda+1))F_{\lambda+1}$ (tous les opérateurs considérés dans cette formule commutent entre eux).

Si l'on définit la "vraie" quantification Op ou ce qui revient au même, les "vraies" fonctions de Wigner $H(\varphi,\psi)$ par les formules

$$\mathrm{Op}(a) = Q(F_\lambda^{-1/2}a) \quad \text{et}$$

$$H(\varphi,\psi) = F_\lambda^{1/2}(W^\#(\varphi,\psi)) = F_\lambda^{-1/2}(W(\varphi,\psi)),$$

on obtient un calcul dans lequel la quasi-totalité des propriétés désirables de la quantification de Weyl dont nous avons dressé la liste au § 1 continue à être vérifiée : invariance à l'égard du groupe $PMp(1,\lambda)$, validité de la formule

$$\|\mathrm{Op}(a)\|_{\text{Hilbert-Schmidt}} = \|a\|_{L^2(\Pi)}\,,$$

ainsi que de la formule

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Op}(a)) = c^{-1}\int a(X)\,d\mu\,(X)$$

pour une certaine constante $c > 0$.

En outre, les symboles réels sont ceux des opérateurs symétriques.

Néanmoins, nous ne pensons pas que la règle de quantification Op soit la bonne, pour les deux raisons suivantes : la première est qu'il ne semble guère agréable de chercher à expliciter l'opérateur $F_\lambda^{1/2}$; la deuxième, plus grave, est que les pôles de la fonction gamma continuent avec cette règle à jouer le rôle funeste mis en évidence au paragraphe 4 .

Une analyse spectrale du lien entre F_λ et l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Π (les deux commutent avec tous les automorphismes de Π) fournit la formule

$$F_\lambda = f_\lambda\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{-y^2\Delta - \frac{1}{4}}\right), \qquad \text{avec}$$

$$f_\lambda(z) = 2\pi \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+z}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{\lambda+1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+z+1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{\lambda-z}{2}+1\right)} .$$

La présence de la racine carrée masque le fait que F_λ est en réalité une fonction <u>uniforme</u> de $-y^2\Delta - \frac{1}{4}$ (observer la symétrie $z \longmapsto 1 - z$) : il n'en irait pas de même si l'on cherchait à isoler deux (un en haut, un en bas) des quatre facteurs gamma qui définissent f_λ : or, c'est précisément ce qu'il faudrait faire, semble-t-il, si l'on voulait résoudre les difficultés que nous venons d'évoquer ; nous n'avons pas encore résolu ce problème de définition d'une détermination de fonction multiforme d'opérateur.

En conclusion , signalons qu'il faut s'attendre, dans le cas des autres domaines d'Elie Cartan, à des développements du même genre et à des résultats comparables ; mais le cas de PSL(2,$\mathbb{R}$) a permis, ce qui a beaucoup facilité certains calculs, une utilisation extensive de nombreuses formules de fonctions spéciales, phénomène sur lequel il ne faudra plus, hélas, compter.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berezin : Quantization, Izv. Akad. Nauk. USSR, 38 (1974), n°5 .

[2] Berezin : Quantization in Complex Symmetric Spaces, ibid. 39 (1975), n°2.

[3] Magnus, Oberhettinger, Soni : Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, Springer-Verlag.

[4] Unterberger, A. : A quantization of hermitian symmetric spaces, Prépublications mathématiques de l'Université de Reims.

[5] Unterberger, A. : Quantification de certains espaces hermitiens symétriques, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1979-1980, exposé XVI, Ecole Polytechnique.

*
* *
*