MOHAMED S. BAOUENDI
FRANÇOIS TRÈVES

Sur quelques propriétés de champs de vecteurs complexes intégrables

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A8_0>

Conférence n° 8

SUR QUELQUES PROPRIETES DE CHAMPS DE VECTEURS COMPLEXES INTEGRABLES

par M. S. BAOUENDI et F. TREVES

On donne un résumé succint d'un travail à paraître sous le titre : "A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields".

Soient $L_1,\dots,L_n$ des champs de vecteurs complexes linéairement indépendants à coefficients C^∞ dans , voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{R}^{n+m}$. On suppose qu'il existe n fonctions $z^1,\dots,z^n$ dans $C^\infty(\Omega)$ satisfaisant :

$$L_j z^k = 0 \quad , \ 1 \leqslant j \leqslant m \quad , \quad 1 \leqslant k,n,$$

$$z^k(0) = 0 \ , \text{ et } dz^1,\dots,dz^n \text{ linéairement indépendants dans } \Omega .$$

Le résultat principal de ce travail est le théorème d'approximation suivant :

Théorème 1 : Sous les hypothèses précédentes, pour tout voisinage ouvert de l'origine $\Omega' \subset \Omega$, il existe un autre voisinage ouvert $\Omega'' \subset \Omega'$ tel que toute fonction h continue dans Ω' et solution du système

$$L_j h = 0 \qquad j = 1,\dots,m \tag{1}$$

est limite uniforme dans Ω'' de polynômes en $z = (z^1,\dots,z^n)$.

On a un résultat similaire si h est une distribution solution de (1).

Comme corollaire immédiat du Théorème 1, nous obtenons la constante de h sur les fibres de l'application $z : \Omega'' \to \mathbb{C}^n$, i.e. $h(\omega_1) = h(\omega_2)$ si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega''$ et $z(\omega_1) = z(\omega_2)$. Il en résulte alors que si $h \in C^0(\Omega')$ satisfait (1), on a

$$h\big|_{\Omega''} = \tilde{h} \circ z \tag{2}$$

où $\tilde{h} \in C^0(z(\Omega''))$. La formule de dérivation des fonctions composées montre en fait que h satisfait les équations de Cauchy-Riemann induites sur $z(\Omega'') \subset \mathbb{C}^n$.

On donne maintenant une application du Théorème 1 et de (2) à l'hypoellipticité analytique du système (1) quand les coefficients des L_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, sont des fonctions analytiques dans Ω. Dans ce cas, les équations de Cauchy-Rieman induites mentionnées plus haut peuvent être prises au sens habituel sur les parties lisses de $z(\Omega'')$.

<u>Définition</u> : On suppose que les coefficients de L_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, sont analytiques dans Ω. On dit que le système $L = (L_1,\dots,L_m)$ est hypoelliptique analytique en O si et seulement si toute distribution u dans Ω', voisinage ouvert de O, telle que $L_j u$ est analytique pour $j = 1,\dots,m$, est elle-même analytique dans un voisinage Ω'' de l'origine.

Si le système L est hypoelliptique analytique en tout point de Ω, on retrouve la définition habituelle de l'hypoellipticité analytique dans un ouvert.

On a le résultat suivant :

<u>Théorème 2</u> : Pour que le système L soit hypoelliptique analytique à l'origine il faut et il suffit que pour tout voisinage de l'origine $\Omega' \subset \Omega$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ tel que si $f \in C^1(z(\Omega'))$ et satisfait les équations de Cauchy-Riemann induites, elle se prolonge holomorphiquement à $\mathcal{O}$.

Si n = 1, on obtient le résultat suivant : pour que L soit hypoelliptique analytique à l'origine il faut et il suffit que z transforme tout voisinage de O dans Ω en un voisinage de O dans $\mathbb{C}$. On donne l'exemple d'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est hypoelliptique analytique en O et qui n'est hypoelliptique analytique dans aucun ouvert contenant O.

Dans le cas n = 2, on montre que le champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

$$\partial_t + i\,\partial_{x_1} + i\,t^2\,\partial_{x_2}$$

est hypoelliptique analytique en O.

On donne aussi l'exemple de deux champs de vecteurs L_1, L_2 dans $\mathbb{R}^4$, à coefficients polynomiaux, tels que le système $L = (L_1,L_2)$ est hypoelliptique analytique dans $\mathbb{R}^4$ mais n'est C^∞ hypoelliptique dans aucun voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{R}^4$. La non C^∞ hypoellipticité de ce système a été montrée auparavant par H . M. Maire.

****