Monique Dauge

Résultats de régularité, singularité et indice pour l'opérateur de Stokes dans un polygone

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A4_0>

Conférence n° 4

RESULTATS DE REGULARITE, SINGULARITE ET INDICE POUR L'OPERATEUR DE STOKES DANS UN POLYGONE.

par M. DAUGE

INTRODUCTION

L'opérateur de Stokes associe au couple vitesse-pression $(\vec{W},p)$ le couple force-divergence $(\vec{F},g)$ par :

$$\begin{aligned} -\Delta\vec{W} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p &= \vec{F} \\ \mathrm{div}\, \vec{W} &= g \end{aligned}$$

Nous nous plaçons ici en dimension 2. $\vec{W} = (w_1,w_2)$ $\vec{F} = (f_1,f_2)$. Voici l'écriture matricielle de l'opérateur :

$$\begin{pmatrix} -\Delta & 0 & D_x \\ 0 & -\Delta & D_y \\ D_x & D_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g \end{pmatrix}$$

ce que nous noterons : $\mathcal{B}\,\mathcal{U} = \mathcal{F}$

Ce système est elliptique au sens de ADN [1] sur un domaine Ω avec les conditions complémentaires : $w_1|_{\partial\Omega} = 0$, $w_2|_{\partial\Omega} = 0$. Ainsi le but de cette étude est de dégager des résultats de régularité, singularité et indice pour l'opérateur de Stokes avec données nulles aux bords sur un domaine Ω polygonal.

Pour arriver au polygone, il sera auparavant nécessaire d'effectuer l'étude du problème "modèle" sur le secteur plan.

On se placera dans des espaces fonctionnels adaptés à la géométrie des domaines.

1. PROBLEME MODELE SUR LE SECTEUR PLAN

Ω désigne un secteur plan de sommet O. Soit ω son ouverture. Rappelons la définition des espaces de Sobolev à double poids introduits par Pham The Lai dans son étude du laplacien, [7] . Pour m entier positif et θ_0,θ_∞ deux réels vérifiant $\theta_0 \leqslant \theta_\infty$:

$$H^m_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) = \{u \in L^2_{loc}(\Omega) \,/\, r^{\theta_o - m + |\alpha|}(1+r)^{\theta_\infty - \theta_o} D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m\}$$

r désigne la distance à O.

On considère les espaces suivants adaptés aux ordres de dérivation intervenant dans $\mathcal{B}$:

$$D^m_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) = \{(w_1,w_2,p) \in H^{m+2}_{\theta_o,\theta_\infty} \times H^{m+2}_{\theta_o,\theta_\infty} \times H^{m+1}_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) \,/\, w_1|_{\partial\Omega},\ w_2|_{\partial\Omega} = o\}$$

$$E^m_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) = H^m_{\theta_o,\theta_\infty} \times H^m_{\theta_o,\theta_\infty} \times H^{m+1}_{\theta_o\,\theta_\infty}(\Omega) .$$

$\mathcal{B}$ envoie $D^m_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega)$ dans $E^m_{\theta_o,\theta_\infty}$ ce qu'on notera $\mathcal{B}^m_{\theta_o,\theta_\infty}$.

Le fait que $\mathcal{B}^m_{\theta_o\,\theta_\infty}$ soit ou non à indice dépend :

i) des paramètres $\eta_o = \theta_o - (m+1)$

$\eta_\infty = \theta_\infty - (m+1)$ caractéristiques des espaces.

ii) de l'emplacement des zéros de la fonction entière sur $\mathbb{C}$ discriminante pour le problème de Stokes et relative à l'ouverture ω :

$$F(\tau) = \frac{sh^2\tau\omega - \tau^2\sin^2\omega}{\tau^2}$$

La multiplicité des zéros de F est 1 ou 2 .

$\mathcal{F}$ désignera l'ensemble des zéros de F, $\mathcal{F}'$ celui des zéros doubles.

<u>Théorème 1</u> : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) F n'a pas de zéro de partie imaginaire η_o ou η_∞ (hypothèse $\mathcal{H}^m_{\theta_o,\theta_\infty}$).

(2) L'image de $\mathcal{B}^m_{\theta_o,\theta_\infty}$ est fermée. $\mathcal{B}^m_{\theta_a,\theta_\infty}$ est alors à indice et on a précisément :

a) $\mathcal{B}^m_{\theta_o,\theta_\infty}$ est injectif

b) Codim Im $\mathcal{B}^m_{\theta_o,\theta_\infty}$ = card$(\mathcal{F} \cap C_{\eta_o\eta_\infty})$ + card $(\mathcal{F}' \cap C_{\eta_o\eta_\infty})$

où $C_{\eta_o\eta_\infty}$ désigne la bande : $\{\tau \in \mathbb{C}/\mathrm{Im}\,\tau \in\,]\eta_o,\eta_\infty[\}$.

Dans le théorème suivant nous explorons la situation quand le second membre $\mathcal{g}$ n'appartient pas forcément à Im $\mathcal{B}^m_{\theta_o,\theta_\infty}$

Théorème 2 : Supposons $\mathcal{H}^m_{\theta_o,\theta_\infty}$ vraie et soit $\mathcal{g} \in E^m_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega)$. Alors il existe dans $D^m_{\theta_o,\theta_o}$ un unique antécédent de $\mathcal{g}$, $\mathcal{U}_o$ et dans $D^m_{\theta_\infty,\theta_\infty}$ un unique antécédent de $\mathcal{g}$, $\mathcal{U}_\infty$. On a :

$$\mathcal{U}_\infty - \mathcal{U}_o = \sum_{\tau \in \mathcal{J} \cap C_{\eta_o \eta_\infty}} \lambda_\tau Y_\tau + \sum_{\tau \in \mathcal{J}' \cap C_{\eta_o \eta_\infty}} \mu_\tau Z_\tau$$

où λ_τ et μ_τ sont des formes linéaires de $\mathcal{g}$, Y_τ et Z_τ sont des singularités dont la forme ne dépend que de τ: en coordonnées polaires :

$$Y_\tau = (r^{i\tau} y_1(\theta), r^{i\tau} y_2(\theta), r^{i\tau -1} y_3(\theta))$$

$$Z_\tau = (r^{i\tau}[z_1 + iy_1 \text{Log } r], r^{i\tau}[z_2 + iy_2 \text{ Log } r], r^{i\tau-1}[z_3 + iy_3 \text{Log } r])$$

les y_j et z_j sont des fonctions C^∞ en θ dont l'expression dépend de τ.

Le lien entre les deux théorèmes provient de ce que :

i) $\mathcal{g} \in \text{Im } \mathcal{B}^m_{\theta_o,\theta_\infty}$ équivaut à $\mathcal{U}_o = \mathcal{U}_\infty$ (ils appartiennent alors tous deux à $D^m_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega)$).

ii) $\mathcal{U}_o = \mathcal{U}_\infty$ équivaut à : toutes les formes linéaires λ_τ et μ_τ s'annulent en $\mathcal{g}$.

Remarque : A l'inverse de la fonction discriminante du biharmonique, égale à $\frac{F(\tau)}{\tau^2 + 1}$, F s'annule toujours en i et -i . Pour ces valeurs de τ on rencontre des situations particulières :

* en i : $\lambda_\tau(f_1,f_2,g) = \int_\Omega g \, dx \, dy$ (cf. condition de résolution du problème variationnel sur un borné).

* en -i : $Y_\tau = (0,0,1)$. D'où la possibilité d'obtenir des résultats quand η_o ou η_∞ égale -1, en dépit que l'hypothèse $\mathcal{H}^m_{\theta_o,\theta_\infty}$ ne soit pas vérifiée.

Pour clore ce paragraphe, disons quelques mots du mode de démonstration de ces divers résultats :

Par transformation conforme puis transformation de Fourier partielle appliquées au système $\mathcal{B}\mathcal{U} = \mathcal{G}$, on arrive au système à une variable, paramétré en τ : $R_\tau z_\tau = \ell_\tau$, $\forall \tau \in C_{\eta_o \eta_\infty}$ où ℓ_τ est analytique à valeurs dans $H^m \times H^m \times H^{m+1}$ ( ]o, ω[) et se déduit directement de $\mathcal{G}$

R_τ est défini de $H^1_o \times H^1_o \times L^2(]o,\omega[)$ dans $H^{-1} \times H^{-1} \times L^2(]o,\omega[)$ par

$$R_\tau\ (u,v,q) = (\ell_1,\ell_2,\ell_3) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \ell_1 &= u'' + (i\tau + 1)^2 - (i\tau - 1)q \\ \ell_2 &= (i\tau - 1)u' + (\tau^2 + 1)v + q' \\ \ell_3 &= (i\tau + 1)u + v' \end{aligned}$$

Les zéros de F apparaissent comme pôles de la fonction méromorphe $\tau \longrightarrow R_\tau^{-1}$. Les résidus de $\tau \longrightarrow R_\tau^{-1}\ell_\tau$ fournissent les morceaux de la partie singulière : $\lambda_\tau Y_\tau$ + éventuellement $\mu_\tau Z_\tau$. Les Y_τ se construisent à partie du noyau de R_τ et les formes linéaires de λ_τ à partir de l'alternative de Fredholm relative à R_τ (noyau de R_τ^*). La situation est plus complexe dans le cas où τ est zéro double de F.

2. PROBLEME SUR LE POLYGONE

Ω désigne un polygone connexe, dont la frontière n'a pas de point double, de sommets $S_1,\dots,S_N$.

On désignera par ω_j l'ouverture de Ω au voisinage de S_j et par φ_j une fonction de troncature au voisinage de S_j .

2.1 Dans des espaces à poids

Après les espaces employés sur le secteur, il est naturel de définir pour m entier positif et $\Theta = (\theta_1,\dots,\theta_N) \in \mathbb{R}^N$:

$$\pi^m_\Theta(\Omega) = \{u \in H^m_{loc}(\Omega) / r_j^{\theta_j - m + |\alpha|} D^\alpha(\varphi_j u) \in L^2(\Omega),\ j = 1,\dots,N,\ |\alpha| \leqslant m\}$$

De la même façon que dans le § 1, on définit $D^m_\Theta(\Omega)$, $E^m_\Theta(\Omega)$ et $\mathcal{B}^m_\Theta$ qui envoie $D^m_\Theta(\Omega)$ dans $E^m_\Theta(\Omega)$.

Nous avons un théorème qui fait pendant au théorème 1 :

De façon analogue : $\eta_j = \theta_j - (m+1)$ et F_j désigne la fonction discriminante relative à l'ouverture ω_j .

Théorème 3 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall\ j \in \{1,\ldots,N\}$ F_j n'a pas de zéro de partie imaginaire η_j (hyp. $\mathcal{H}^m_\Theta$)

(2) L'image de $\mathcal{B}^m_\Theta$ est fermée.

$\mathcal{B}^m_\Theta$ est alors à indice et :

$$\operatorname{Ind} \mathcal{B}^m_\Theta = \sum_{j=1}^{N} (\operatorname{card} \mathcal{F}_j \cap C_{o,\eta_j} + \operatorname{card} \mathcal{F}'_j \cap C_{o,\eta_j}$$

$$- \sum_{j=1}^{N} (\operatorname{card} \mathcal{F}_j \cap C_{\eta_j,o} + \operatorname{card} \mathcal{F}'_j \cap C_{\eta_j,o}$$

Mais ici, en général, $\mathcal{B}^m_\Theta$ n'est pas injectif !

Cas particulier important : quand tous les η_j sont négatifs ; on a alors

$$D^m_\Theta(\Omega) \hookrightarrow H^1_o \times H^1_o \times L^2(\Omega)$$

$$E^m_\Theta(\Omega) \hookrightarrow H^{-1} \times H^{-1} \times L^2(\Omega)$$

On est alors dans le cadre d'une résolution variationnelle du problème (voir Temam [8]).

<u>Théorème 4</u> : On fait l'hypothèse $\mathcal{H}^m_\Theta$.

Soit $\mathcal{G} = (f_1, f_2, \ ) \in E^m_\Theta$ tel que $\int_\Omega g \,dx\, dy = 0$

Soit $\mathcal{U} \in H^1_o \times H^1_o \times L^2(\Omega)$ une solution du problème variationnel. $\mathcal{U}$ se décompose en la somme d'une partie régulière $\mathcal{U}_o \in D^m_\Theta$ et d'une partie singulière :

$$\sum_{j=1}^{N} \Big(\sum_{\tau \in \mathcal{F}_j \cap C_{\eta_j,o}} \lambda_{j\tau}\, U_{j\tau} + \sum_{\tau \in \mathcal{F}'_j \cap C_{\eta_j,o}} \mu_{j\tau}\, V_{j\tau}$$

où $\lambda_{j\tau}$ et $\mu_{j\tau}$ sont des scalaires,

$U_{j\tau} = \varphi_j\, Y_{j\tau}$ avec $Y_{j\tau}$ la singularité correspondant à ω_j et τ

$V_{j\tau} = \varphi_j\, Z_{j\tau}$,idem .

Le résultat de Osborn [6] correspond à ce théorème pour $\Theta = \mathbb{O}$ où $\mathbb{O}$ désigne le poids nul $(0,\ldots,0)$.

<u>Cas particulier</u> : $\eta_j = 0$ $\forall j$, donc $\theta_j = m+1$; la partie singulière est absente.

<u>Autre cas</u> : $\eta_j = -1$ $\forall j$, donc $\theta_j = m$. $\mathcal{H}^m_\Theta$ n'est pas vérifiée.

Mais lorsqu'aucune des ouvertures ω_j ne vérifie la relation $\operatorname{tg} \omega_j = \omega_j$, on a une décomposition en partie régulière et singulière du même type, mais avec $\mathcal{U}_o$ vérifiant seulement :

$$w_1, w_2 \in \pi^{m+2}_\Theta(\Omega) \ , \ D_x p, D_y p \in \pi^m_\Theta, \text{ où bien sûr } (w_1, w_2, p) = \mathcal{U}_o .$$

La partie singulière est absente si Ω est convexe : en effet

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(\mathcal{F}_j \cap C_{-1,o}) + \operatorname{card}(\mathcal{F}'_j \cap C_{-1,o}) &= 0 \qquad \text{si} \quad \omega_j < \pi \\ &= 1 \qquad \text{si} \quad \pi < \omega_j < \omega_o \\ &= 2 \qquad \text{si} \quad \omega_j > \omega_o \end{aligned}$$

où ω_o désigne l'unique valeur $\in]0,2\pi[$ telle que $\operatorname{tg} \omega_o = \omega_o$. On retrouve le résultat de Kellogg et Osborn [4] qui correspond au cas m = 0, Ω convexe.

2.2 <u>Dans les espaces ordinaires</u>

Soit $D^m(\Omega) = (H^{m+2} \cap H^1_o) \times (H^{m+2} \cap H^1_o) \times H^{m+1}(\Omega)$

$$E^m(\Omega) = H^m \times H^m \times H^{m+1}(\Omega)$$

On est évidemment dans le cadre variationnel.

On note $\mathcal{B}^m$ l'opérateur de Stokes : $D^m(\Omega) \longrightarrow E^m(\Omega)$. Voici d'abord le théorème d'indice :

<u>Théorème 5</u> : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall j$ F_j n'a pas de zéro de partie imaginaire $-(m+1)$

(2) L'image de $\mathcal{B}^m$ est fermée.

On a alors $\operatorname{Ind} \mathcal{B}^m = \sum_{j=1}^{N} (\operatorname{card} \mathcal{F}_j \cap C_{-(m+1),o} + \operatorname{card} \mathcal{F}'_j \cap C_{-(m+1),o})$

N. B. Le cas m = 0 entre dans le cadre du § précédent car $H^2 \cap H^1_o = \pi^2_\Phi \cap H^1_o$

Remarquons que la condition (1) n'est autre que l'hypothèse $\mathcal{H}^m_\Phi$ et que $\operatorname{Ind} \mathcal{B}^m = \operatorname{Ind} \mathcal{B}^m_\Phi$. En fait $\mathcal{B}^m$ et $\mathcal{B}^m_\Phi$ sont très liés. Nous allons voir comment dans la recherche des singularités. Introduisons pour $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} E^m_A(\Omega) = \{(f_1,f_2,g) \in E^m(\Omega) / \ & D^\alpha f_k(S_j) = 0 \quad j = 1,\dots,N \ , \ |\alpha| \leq m-2, \ k = 1,2 \\ & D^\alpha g(S_j) = 0 \quad j = 1,\dots,N \ , \ |\alpha| \leq m-1\} \end{aligned}$$

Nous avons

$$\forall \mathcal{G} \in E^m_A(\Omega) \quad , \quad \exists \mathcal{U} \in D^m(\Omega) \qquad \mathcal{G} - \mathcal{B}\mathcal{U} \in E^m_\Phi \; .$$

Ce résultat n'est pas trivial car, quoique $\forall \varepsilon > 0$ E^m_A s'injecte dans $E^m_{(\varepsilon,\dots,\varepsilon)}$, E^m_A n'est pas inclus dans E^m_Φ . La démonstration s'inspire de Kondrat'ev [5] , § 4.

Il reste à faire l'étude, pour chaque $j \in \{1,\dots,N\}$, du problème modèle avec second membre polynômial sur le secteur Ω_j qui coïncide avec Ω au voisinage de S_j. Le second membre appartient à Q^m, où $Q^m = \{(f_1,f_2,g) \in \mathbb{C}[X,Y]^3 / d^\circ f_1, d^\circ f_2 \leqslant m-2,$ $d^\circ g \leqslant m-1\}$. On cherche la solution dans :

$$P^m_j = \{(w_1,w_2,p) \in \mathbb{C}[X,Y]^3 / \; d^\circ w_k \leqslant m \quad w_k|_{\partial\Omega_j} = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1,2$$
$$d^\circ p \leqslant m-1 \}$$

P^m_j et Q^m sont de même dimension et $\mathcal{B}$ envoie P^m_j dans Q^m . Mais la codimension de l'image est 1 : $(0,0,1)$ n'est pas atteint. On construit alors W^*_j le plus régulier possible, vérifiant les conditions aux bords et tel que $\mathcal{B}W^*_j = (0,0,1)$. On obtient une expression de la forme :

$$W^*_j = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_1 \log r + \mathcal{W}_2\theta + \mathcal{W}_3(\mathrm{Log}\, r)^2 + \mathcal{W}_4\,\theta\,\mathrm{Log}\, r + \mathcal{W}_5\theta^2$$

où les $\mathcal{W}_k$ sont de la forme $a_k(x - X_j) + b_k(y - Y_j)$ avec (X_j, Y_j) les coordonnées de S_j. Les $\mathcal{W}_k$ pour $k = 1,\dots,5$ ne sont pas tous nuls.

$W_j = \varphi_j W^*_j$ appartient à $H^1_0 \times H^1_0 \times L^2$ et pas à $D^m(\Omega)$. On a le théorème de décomposition de "la" solution variationnelle $\mathcal{U}$ du problème de Stokes avec second membre $(f_1,f_2,g) \in E^m$, tel que $\int_\Omega g = 0$.

<u>Théorème 6</u> :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \sum_{j=1}^{N} \Big(\overline{\sum_{\substack{\tau \in \mathcal{T}_j \cap C_{-(m+1),0} \\ \tau \neq -i}}} \lambda_{j\tau} U_{j\tau} + \overline{\sum_{\tau \in \mathcal{T}'_j \cap C_{-(m+1),0}}} \mu_{j\tau} V_{j\tau} + g(S_j) W_j$$

où $\mathcal{U}_0 \in D^m(\Omega)$.

<u>Exemple</u> : Si Ω est un rectangle, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_o + \sum_{j=1}^{N} g(S_j)W_j$ pour m = 1.

<u>Remarque</u> : On retrouve le résultat de Grisvard [2] pour g = O, car, dans ce cas, les singularités W_j n'apparaisent pas .

---

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg : Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, Comm. Pure Appl. Math. 17 (1964), 35-92.

[2] P. Grisvard : Singularité des solutions du problème de Stokes dans un polygône Université de Nice (1979), preprint.

[3] Guillement : Problème biharmonique dans un secteur plan. Séminaire d'analyse Nantes (1978/79) 143-160.

[4] R. B. Kellogg,J. E. Osborn : A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon. J. of functional analysis, Vol. 21 (1976) 397-431.

[5] V.A. Kondrat'ev : Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points. Trans. Moscow Math. Soc. 16 (1967) 227-313 translated by Amer. Math. Soc. (1968).

[6] J. E. Osborn : Regularity of solutions of the Stokes problem in a polygonal domain. Numerical solution of Partial Differential Equations III, Synspade ed. B. Hubbard, Ac. Press (1975) 393-411.

[7] Pham The Lai : Problème de Dirichlet dans un cône avec paramètre spectral pour une classe d'espaces de Sobolev à poids. Comm. in Partial Differential Equations 4 (4), 389-445 (1979).

[8] Temam : Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. North-Holland.

* * *