

CLAUDY SCHOL-CANCELIER

**Problème de Dirichlet intégral-différentiel et semi-groupe
de Feller sur un ouvert borné de R^n**

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980___A15_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLEME DE DIRICHLET INTEGRO-DIFFERENTIEL ET
SEMI-GROUPE DE FELLER SUR UN OUVERT BORNE DE \mathbb{R}^n

par Mme C. SCHOL-CANCELIER

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière de classe C^2 . On se propose d'étudier les opérateurs suivants :

$$wu(x) = Pu(x) + Su(x) \quad u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad x \in \Omega$$

où P est un opérateur différentiel du second ordre elliptique éventuellement dégénéré, et S un opérateur défini par

$$\int_{\Omega} s(x,y) [u(y) - u(x) - \sum_{i=1}^n (y^i - x^i) u'_i(x)] dy ;$$

$s(x,y) \geq 0$ étant une densité satisfaisant la condition $\int_{\Omega} s(x,y) |y-x|^2 dy < +\infty$.

Ces opérateurs vérifient le principe du maximum positif :

$$x \in \Omega, \quad u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad u(x) = \sup_{\bar{\Omega}} u \geq 0 \Rightarrow wu(x) \leq 0.$$

A des conditions de régularité près, les opérateurs w sont les seuls opérateurs satisfaisant le principe du maximum positif ([1]).

On suppose que α est un nombre réel > 0 , que $s(x,y) = \frac{K(x,y)}{|y-x|^{n+2-\alpha}}$ où

$K(x,y)$ est une fonction positive, indéfiniment dérivable, nulle dès que $x = y$ appartient à $\partial\Omega$ ainsi que ses dérivées partielles d'ordres 1 et 2.

On suppose aussi que le bord $\partial\Omega$ n'est pas caractéristique.

Pour les solutions faibles du problème de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{l} (w - \beta)u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (\beta \text{ réel } > 0),$$

on démontrera des résultats d'existence, de régularité et d'unicité.

I. Nouvelle formulation de l'opérateur w .

$d(x)$ désignera la distance de x au bord $\partial\Omega$. L'expression $Su(x)$ est égale à

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{K(x,y)}{|y-x|^{n+2-\alpha}} [u(y) - u(x) - \sum_{i=1}^n (y^i - x^i) u'_i(x)] dy \quad (x \in \Omega)$$

égale (en négligeant un terme à noyau intégrable) à

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{K(x,y)}{|y-x|^{n+2-\alpha}} [u(y) - u(x)] dy - \\ - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n u'_i(x) K(x,x) \int_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{y^i - x^i}{|y-x|^{n+2-\alpha}} dy . \end{aligned}$$

Lorsque $x \in \Omega$, l'intégrale $\int_{|y-x| \leq \frac{1}{2}d(x)} \frac{y^i - x^i}{|y-x|^{n+2-\alpha}}$ est nulle; on peut donc

fixer pour le deuxième terme ε à $\frac{1}{2}$. En utilisant les propriétés d'annulation de $K(x,y)$ sur le bord on peut prolonger le terme $K(x,x) \int_{|y-x| \geq \frac{1}{2}d(x)} \frac{y^i - x^i}{|y-x|^{n+2-\alpha}} dx$

à $\bar{\Omega}$ tout entier en une fonction $\phi_i(x)$ de classe $C^1(\Omega)$. Le terme $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) u'_i(x)$ sera regroupé avec les termes de $Pu(x)$, ce qui détermine un nouvel opérateur différentiel \bar{P} . En définitive:

$$\begin{aligned} wu(x) &= \bar{P}u(x) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{K(x,y)}{|y-x|^{n+2-\alpha}} [u(y) - u(x)] dy \\ &= \bar{P}u(x) + \bar{S}u(x) . \end{aligned}$$

II. Calcul de l'opérateur adjoint de w .

Pour le calcul de l'adjoint de \bar{S} , on remarquera que

$$\iint_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{K(x,y)}{|y-x|^{n+2-\alpha}} [u(y) - u(x)] v(x) dx dy \quad (x \in \Omega, v \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ nulle sur le bord } \partial\Omega)$$

est égal à

$$\iint_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{K(y,x)}{|y-x|^{n+2-\alpha}} [v(y) - v(x)] u(x) dx dy -$$

$$\iint_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{K(x,y) - K(y,x)}{|y-x|^{n+2-\alpha}} u(x) v(x) dx dy$$

avec une "bonne annulation" de $K(x,y) - K(y,x)$ sur le bord. Il en résulte que

$$\bar{S}u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon d(x)} \frac{K(y,x)}{|y-x|^{n+2-\alpha}} [u(y) - u(x)] dy - \phi(x)u(x) \quad (\phi \in C^1(\bar{\Omega})).$$

III. Existence de solutions faibles du problème de Dirichlet $\left\{ \begin{array}{l} (w-\beta)u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$

On considère l'opérateur $w_\varepsilon = w + \varepsilon \Delta$ où Δ est l'opérateur Laplacien.

$P + \varepsilon \Delta$ est alors un opérateur différentiel elliptique non dégénéré. Pour ces opérateurs, lorsque f appartient à $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ et que les coefficients de P sont suffisamment réguliers, Bony-Courrège-Priouret ont démontré l'existence et l'unicité de la solution $u_\varepsilon \in C^{2,\lambda}(\bar{\Omega})$ du problème de Dirichlet $\left\{ \begin{array}{l} (w_\varepsilon - \beta)u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$.

La solution u_ε vérifie en norme uniforme l'inégalité $\|u_\varepsilon\| \leq \frac{\|f\|}{\beta}$. Il en résulte que l'ensemble des solutions $\{u_\varepsilon\}$ possède une valeur d'adhérence u lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$; u est alors une solution faible.

IV. Régularité sur le bord des solutions u_ε .

Par un argument classique utilisant les fonctions barrières, on peut démontrer que pour tout $x \in \partial\Omega$, $|\text{grad } u_\varepsilon(x)| \leq Cte \|f\|$.

Pour la démonstration de cette inégalité intervient l'hypothèse bord non caractéristique, qui permet de choisir des fonctions barrière indépendantes de ε et donc d'avoir des majorations indépendantes de ε .

V. Régularité dans Ω des solutions u_ε .

On suppose que f appartient à $C^1(\bar{\Omega})$. On appellera "bon terme" tout terme majoré par $\|p\|$ ou par $\|f\|_1^2$, où $p(x) = \sum_{i=1}^n (u_\varepsilon)_i'(x)^2$. On se propose de démontrer que pour β suffisamment grand, $|\text{grad } u_\varepsilon(x)| \leq Cte \|f\|_1$ en tout point

$x \in \Omega$. La méthode utilisée consiste à dériver partiellement par rapport à x^k les deux membres de l'équation

$$w_\varepsilon u_\varepsilon(x) - f(x) = \beta u_\varepsilon(x)$$

puis les multiplier par $(u_\varepsilon)_k'(x)$ et enfin sommer par rapport à l'indice k . Le membre de gauche est la somme de termes négatifs et de bons termes et le membre de droite est égal à $\beta p(x)$ en tout point $x \in \Omega$ où $p(x) = \|p\|$. Il s'ensuit une inégalité $\beta p(x) \leq \beta_0 p(x) + \beta_1 \|f\|_1^2$ de laquelle on déduit l'inégalité annoncée.

Les résultats des paragraphes IV et V permettent de conclure que les solutions faibles u du problème de Dirichlet $\left\{ \begin{array}{l} (w - \beta)u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$ sont lipschitziennes lorsque f appartient à $C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque : On peut démontrer que lorsque $f \in L^\infty(\Omega)$, le problème de Dirichlet admet une solution faible $u \in L^\infty(\Omega)$, que lorsque f est une fonction lipschitzienne il admet une solution faible u lipschitzienne telle que $\|u\|_{lip} \leq Cte \|f\|_{lip}$.

VI. Unicité de la solution faible dans $L^\infty(\Omega)$.

La démonstration de l'unicité annoncée repose essentiellement sur la démonstration de la majoration

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 (\Delta u_\varepsilon)^2 dx \leq Cte ,$$

que l'on obtient en multipliant les deux membres de l'équation $(w_\varepsilon - \beta)u_\varepsilon(x) = f(x)$ par $\varepsilon \Delta u_\varepsilon$ puis en les intégrant sur Ω ce qui donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon^2 (\Delta u_\varepsilon)^2 dx + \int_{\Omega} \varepsilon \Delta u_\varepsilon \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} (u_\varepsilon)''_{ij} dx - \int_{\Omega} \varepsilon (u_\varepsilon)'_k \frac{\partial}{\partial x^k} [\bar{S}u_\varepsilon(x)] dx \\ & = \int_{\Omega} \varepsilon \Delta u_\varepsilon (f - \sum_{i=1}^n a_i (u_\varepsilon)'_i - a u_\varepsilon - \beta u_\varepsilon) dx \end{aligned}$$

(où a_{ij} , a_i , a sont les coefficients de l'opérateur différentiel \bar{P}).

Le membre de gauche est la somme de $\int_{\Omega} \varepsilon^2 (\Delta u_{\varepsilon})^2 dx$, de termes positifs, de termes bornés, de termes majorés en valeur absolue par $\eta \int_{\Omega} \varepsilon^2 (\Delta u_{\varepsilon})^2 dx$ où $\eta > 0$ peut être choisi aussi petit qu'on le veuille.

Le membre de droite est la somme de termes bornés, de termes majorés en valeur absolue par $\eta_1 \int_{\Omega} \varepsilon^2 (\Delta u_{\varepsilon})^2 dx$ où $\eta_1 > 0$ peut être lui aussi choisi petit qu'on le veuille. Il s'ensuit l'inégalité annoncée et enfin que le problème de Dirichlet $\left\{ \begin{array}{l} (w - \beta)u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$ a une solution faible u nulle presque partout

dans Ω (intervient dans cette démonstration le fait que l'opérateur w^* est du même type que l'opérateur w) lorsque β est assez grand.

VII. Construction de semi-groupes de Feller sur Ω .

On considère \mathcal{D} l'ensemble des fonctions u lipschitziennes sur $\bar{\Omega}$, nulles sur $\partial\Omega$ telles qu'il existe une fonction lipschitzienne f nulle au bord et u soit solution faible du problème de Dirichlet $\left\{ \begin{array}{l} wu = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$

On définit sur \mathcal{D} l'opérateur \mathcal{W} par : $\mathcal{D} \ni u \rightarrow f$. On peut démontrer que \mathcal{D} est dense dans $C_0(\Omega)$ qu'il existe $\beta > 0$ telle que l'image $(\mathcal{W} - \beta)(\mathcal{D})$ soit dense dans $C_0(\Omega)$ et que \mathcal{W} satisfait le principe du maximum positif. Il s'ensuit que l'opérateur $(\mathcal{D}, \mathcal{W})$ est préfermé et que sa fermeture est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur Ω . On peut préciser l'ensemble de définition de la fermeture de l'opérateur \mathcal{W} ; $\bar{\mathcal{D}}$ est l'ensemble des fonctions $u \in C_0(\Omega)$ telles qu'il existe $f \in C_0(\Omega)$ et u soit solution faible du problème de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{l} wu = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

Remarque : Les techniques de calcul sont inspirées des travaux de O. A. Oleinik.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bony, Courrège, Priouret : Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégral-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18.2 (1968), 369-521.

- [2] O. A. Oleinik : A problem of Fichera. Soviet Math. Dokl. 5 (1964). On the smoothness of solutions of degenerate elliptic and parabolic equations. Soviet Math. Dokl. 3 (1965).
- [3] Schol-Cancelier : Sur la régularité des solutions faibles du problème de Dirichlet associé à un opérateur intégral-différentiel. C. R. Acad. Sc. Paris, t.284 (4 avril 1977) 795-798.
Unicité dans $L^\infty(\Omega)$ de la solution faible du problème de Dirichlet et construction de semi-groupes de Feller. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288 (2 mai 1979) 757-760.

*
* *
*