

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-MICHEL BONY

## **Calcul symbolique et singularités des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1979), p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1979\\_\\_\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979___A1_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CALCUL SYMBOLIQUE ET SINGULARITES DES SOLUTIONS  
DES EQUATIONS AUX DERIVEES  
PARTIELLES NON LINEAIRES

par J. M. BONY

1. Notations et résultats

Soit  $\mathfrak{F}[u] = F(x, u(x), \dots, \partial^\beta u(x), \dots) = 0$  une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre  $m$ , où  $F(x, u_0, \dots, u_\beta, \dots)$  est une fonction  $C^\infty$  de ses arguments. On supposera éventuellement que  $F$  est quasi-linéaire, et plus précisément qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$F(x, u, \dots) = \sum_{k_0 < k \leq m} \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x, u, \dots, \partial^\beta u, \dots)_{\beta \leq p(k)} \cdot \partial^\alpha u + A_{k_0}(x, u, \dots, \partial^\beta u)_{\beta \leq k_0}$$

Dans ce cas, on note  $d = \text{Max}(k_0, \frac{k+p(k)}{2})$  en faisant la convention  $p(k) = -\infty$  lorsque les  $A_\alpha$  correspondants ne dépendent que de  $x$ . On a  $d = m$  pour une équation non quasi-linéaire,  $0 \leq d \leq m - \frac{1}{2}$  pour une équation quasi-linéaire, et  $d = -\infty$  pour une équation linéaire.

Si  $u$  est une fonction réelle de classe  $C^\rho$  avec  $\rho > d$ , les fonctions non linéaires et les produits apparaissant dans l'expression de  $F$  sont bien définis, et  $F(x, u, \dots, \dots) \in C^{\rho-d}$ . Les espaces de fonctions hildériennes  $C^\rho$  sont définis de façon habituelle pour  $0 < \rho < 1$ , la définition s'étend aux réels non entiers de telle manière que  $Pu \in C^{\rho-m}$  pour  $u \in C^\rho$  et  $P$  pseudo-différentiel d'ordre  $m$ , les nombres  $\rho$  et  $\rho-m$  n'appartenant pas à  $\mathbb{Z}$ . Dans les résultats ci-dessous, il faudra remplacer  $u \in C^\rho$  par  $u \in C^{\rho-\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , lorsque  $\rho$  sera entier.

De même, si  $u \in H^s$ , l'expression  $\mathfrak{F}[u]$  est bien définie si on a la double condition :  $s > n/2 + \text{Max}(k_0, p(k))$  et  $s > n/4 + d$ .

Si  $u$  est une solution de  $\mathfrak{F}[u] = 0$ , on définit l'équation caractéristique

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x, u(x), \dots, \partial^\beta u(x), \dots) (i\xi)^\alpha = 0,$$

et on définit la variété caractéristique et les bicaractéristiques de façon habituelle.

**Théorème 1** : Soit  $u$  une solution de classe  $C^\rho$  de  $\mathfrak{F}[u] = 0$ ,  $\rho > d$ . Alors en tout point  $(x_0, \xi_0)$  non caractéristique,  $u$  est microlocalement de classe  $C^{2\rho+m-2d}$ . Si  $u \in H^s$ ,  $s > n/2 + \text{Max}(k_0, p(k))$ ,  $s > n/4 + d$ , on a microlocalement  $u \in H^t$  pour  $t < 2s - n/2 + m - 2d$ .

**Théorème 2** : Soit  $u$  une solution de classe  $H^s$ ,  $s$  vérifiant les conditions ci-dessus. Supposons de plus que  $p_m(x, \xi)$  soit de classe  $C^2$ . Soit  $(x_0, \xi_0)$  appartenant à la variété caractéristique, tel que  $u$  appartienne microlocalement à  $H^r$  en  $(x_0, \xi_0)$ , avec  $r < 2s - n/2 + m - 2d - 1$ . Alors  $u$  appartient à  $H^r$  le long de la bicaractéristique issue de  $(x_0, \xi_0)$ .

Sous l'hypothèse  $u \in H^s$ , on choisit  $\rho < s - n/2$ , voisin de  $s - n/2$ . On a alors  $u \in C^\rho$ . Le gain de régularité est  $\rho + m - 2d$  dans le théorème 1, quantité positive d'après les hypothèses. Le théorème 2 n'est intéressant que si  $\rho + m - 2d > 1$ , ce qui implique seulement  $p_m(x, \xi) \in C^1$ . On n'a plus alors nécessairement unicité des courbes intégrales du champ hamiltonien. Toutefois, un raffinement du théorème 2 assure qu'une singularité en  $(x_0, \xi_0)$  se prolonge le long de l'une au moins des demi-bicaractéristiques issues de  $(x_0, \xi_0)$ .

**Remarque** : Nous avons exposé en 1978, et résumé dans [1], une démonstration des théorèmes 1 et 2, au moins dans le cas des équations quasi-linéaires du second ordre. Les méthodes que nous utilisons alors se généralisent naturellement aux équations d'ordre quelconque, mais nécessitent dans certains cas des hypothèses  $\rho > \rho_0$  plus restrictives que la condition  $\rho > d$  ci-dessus.

Indépendamment et simultanément, B. Lascar [5] et J. Rauch [6] ont obtenu certains cas particuliers des théorèmes 1 et 2.

## 2. Un nouveau calcul symbolique

Soit  $a(x, \xi)$  une fonction homogène de degré  $m$  en  $\xi$ , de classe  $C^\infty$  en  $\xi$  pour  $\xi \neq 0$ , à support compact en  $x$  et de classe  $C^\rho$  en  $x$  ( $\rho > 0$  non entier).

Posons

$$T_a u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \chi \left( \frac{\xi - \eta}{|\eta|} \right) \hat{a}(\xi - \eta, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta$$

où  $\hat{a}$  est la transformée de Fourier de  $a$  par rapport à la première variable, et où  $\chi$  est égale à 1 pour  $|\xi - \eta| \leq \varepsilon_1 |\eta|$  et égale à 0 pour  $|\xi - \eta| \geq \varepsilon_2 |\eta|$ , avec  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$ .

L'opérateur  $T_a$  applique  $C^\sigma$  dans  $C^{\sigma-m}$ ,  $H^s$  dans  $H^{s-m}$  quels que soient  $\sigma$  (non entier) et  $s$ . Si  $\chi_1$  et  $\chi_2$  vérifient les conditions ci-dessus, la différence des deux opérateurs associés applique  $C^\sigma(H^s)$  dans  $C^{\sigma-m+\rho}(H^{s-m+\rho})$ .

Dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $\Sigma_\rho^m$  la classe des fonctions du type  $a_m(x, \xi) + a_{m-1}(x, \xi) + \dots + a_{m-[\rho]}(x, \xi)$ , définies dans  $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , où  $a_{m-k}$  est homogène de degré  $m-k$  en  $\xi$ ,  $C^\infty$  en  $\xi$ ,  $C^{\rho-k}$  en  $x$ .

On dit que  $A$  est un opérateur paradifférentiel (proprement supporté) dans  $\Omega$ , d'ordre  $m$  et de classe  $C^\rho$  [ $A \in \text{Op}(\Sigma_\rho^m)$ ] si  $A$  est un opérateur proprement supporté, et s'il existe  $a(x, \xi) \in \Sigma_\rho^m(\Omega)$  tel que, pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , quelles que soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  dans  $C_0^\infty(\Omega)$ , égales à 1 au voisinage de  $K$ , l'opérateur  $A - \varphi_2 T_{\varphi_1 a}$ , restreint aux distributions à support dans  $K$ , applique  $C^\sigma$  (resp.  $H^s$ ) dans  $C^{\sigma-m+\rho}$ .

L'application qui à un opérateur paradifférentiel  $A$  associe son symbole  $a = \sigma(A)$  est bien définie et surjective.

**Proposition 4** : Soient  $A \in \text{Op}(\Sigma_\rho^{m_1})$  et  $B \in \text{Op}(\Sigma_\rho^{m_2})$ . Alors  $A.B \in \text{Op}(\Sigma_\rho^{m_1+m_2})$  et on a

$$\sigma(AB) = \sigma(A) \# \sigma(B) = \sum_{|\alpha|+|\ell|+k \leq [\rho]} (1/\alpha!) \partial_\xi^\alpha a_{m_1-k} D_x^\alpha b_{m_2-\ell}$$

L'adjoint  $A^*$  appartient à  $\text{Op}(\Sigma_\rho^{m_1})$ , et on a

$$\sigma(A^*) = [\sigma(A)]^* = \sum_{|\alpha|+k \leq [\rho]} (1/\alpha!) \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{a}_{m_1-k}$$

### 3. Fonctions non linéaires

**Proposition 5** : Soient  $a \in C^0$  et  $u \in C^\sigma$

- a) si  $\rho > 0$ ,  $\sigma > 0$ , on a  $au = T_a \cdot u + T_u \cdot a + r$  avec  $r \in C^{\rho+\sigma}$ .  
 b) si  $\rho > 0$ ,  $\sigma < 0$ ,  $\rho + \sigma > 0$ , on a  $au = T_a \cdot u + r$  avec  $r \in C^{\rho+\sigma}$ .

**Théorème 6** : Soit  $u \in C^\rho$ ,  $\rho > 0$  et  $F$  de classe  $C^\infty$ . Alors

$$F(u(x)) = T_{F'(u(x))} \cdot u(x) + r(x) \text{ avec } r \in C^{2\rho}$$

Plus généralement, on a :

$$F(u_1(x), \dots, u_N(x)) = \sum T_{\partial F / \partial u_i} \cdot u_i + r \text{ avec } r \in C^{2\rho}$$

si  $u_j \in C^\rho$ .

D'après la proposition 5, on a  $u^2 \equiv 2T_u \cdot u \equiv T_{2u} \cdot u \pmod{C^{2\rho}}$ .

Une application répétée de cette proposition et du fait que (Prop.4),  $T_a \circ T_b \equiv T_{ab} \pmod{\rho\text{-régularisants}}$  permet de démontrer le théorème lorsque  $F$  est un polynôme. Une estimation soignée des restes, et les théorèmes de Bernstein sur l'approximation des fonctions  $C^\infty$  par des polynômes permettent de conclure.

**Corollaire 7** : Soit  $u \in C^\rho$ ,  $\rho > \text{Max}(k_0, p(k))$ , une solution de  $\mathcal{F}[u] = 0$ . Soit  $P$  un opérateur paradifférentiel d'ordre  $m$  et de classe  $C^{\rho+m-2d}$  de symbole

$$\sigma(P) = \sum_{\beta > 2d-\rho} \partial F / \partial u_\beta(x, u(x), \dots) (i\xi)^\beta.$$

a) Si  $\rho > d$ , on a  $Pu \in C^{2\rho-2d}$

b) Si  $u \in H^s$ , avec  $s > n/2 + \rho$  et  $s > n/4 + d$ , on a  $Pu \in H^{s+\rho-2d}$ .

Dans le cas non quasi-linéaire, on a immédiatement, pour  $\rho > m$

$$\mathcal{F}[u] \equiv \sum T_{\partial F / \partial u_\beta} \cdot \partial^\beta u \equiv T_{\sum \partial F / \partial u_\beta} | (i\xi)^\beta \cdot u \pmod{C^{2\rho-2m}}.$$

Dans le cas quasilineaire, on applique d'abord la proposition 5 aux produits  $A_\alpha(x, u, \dots) \partial^\alpha u$ , puis le théorème 6 aux termes  $A_\alpha(\dots)$ .

#### 4. Démonstration du théorème 1

Soit donc  $(x_0, \xi_0)$  n'appartenant pas à la variété caractéristique, et soit  $k(x, D)$  un opérateur pseudo-différentiel classique, d'ordre 0, dont le symbole s'annule au voisinage de la variété caractéristique de  $P$ , et

dont le symbole principal est non nul en  $(x_0, \xi_0)$ .

Soit  $q \in \Sigma_{\rho+m-2d}^{-m}$  tel que  $k = q \# p$ , et  $Q \in \text{op}(\Sigma_{\rho+m-2d}^{-m})$  de symbole  $q$ . On a alors  $k(x, D)u = QPu + Ru$  où  $R$  est  $\rho + m - 2d$  régularisant. On a  $Q[Pu] \in C^{2\rho+m-2d}$  (ou  $H^{2s - n/2 + m - 2d - \varepsilon}$ ) et  $Ru$  appartient au même espace, ce qui prouve le théorème.

### § 5. Démonstration du théorème 2

C'est une conséquence immédiate du théorème linéaire suivant.

**Théorème 8** : Soit  $P \in \text{Op}(\Sigma_{\sigma}^m)$ ,  $\sigma > 1$ , dont le symbole principal  $p_m$  est réel et de classe  $C^2$ . Soit  $u \in H^s$  tel que  $Pu \in H^t$  au voisinage d'un arc de bicaractéristique. Pour  $r \leq \text{Min}(t + m - 1, s + \sigma - 1)$ , si  $u$  est de classe  $C^r$  en un point de l'arc de bicaractéristique,  $u$  est de classe  $C^r$  au voisinage de l'arc entier.

On peut supposer  $m = 1$ , en multipliant  $P$  à gauche par un opérateur elliptique d'ordre  $1 - m$ .

Soit  $\Gamma$  un arc de bicaractéristique joignant  $(x_0, \xi_0)$  à  $(x_1, \xi_1)$ . Etant donné  $\omega$  voisinage conique de  $(x_0, \xi_0)$  et  $\Omega$  voisinage conique de  $\Gamma$ , une première étape consiste à construire des fonctions  $k_{\delta}(x, \xi)$ ,  $0 < \delta < \delta_0$ , positives,  $C^{\infty}$ , homogènes de degré 0 en  $\xi$ , à support dans  $\Omega$ , strictement positives sur  $\Gamma$ , vérifiant :

$$|H_{p_1} k_{\delta}| = |\{p_1, k_{\delta}\}| \geq 1/\delta k_{\delta} \text{ hors de } \omega.$$

On notera  $K_{\delta} = k_{\delta}(x, D)$ . Le point-clef consiste en la démonstration d'une inégalité d'énergie, voisine de celle utilisée dans [4], de la forme suivante :

il existe une application  $\delta \rightsquigarrow c(\delta)$  de  $]0, \delta_0[$  dans  $\mathbf{R}^+$ , tendant vers 0 avec  $\delta$ , une application  $\delta \rightsquigarrow M(\delta)$  de  $]0, \delta_0[$  dans  $\mathbf{R}^+$ ,  $\varepsilon > 0$  et des semi-normes  $|\cdot|_{r, \omega}, \dots$  telles que l'on ait

$$(*) \quad \forall u \in C_0^{\infty}, |K_{\delta} u|_r \leq c(\delta) |K_{\delta} Pu|_r + M(\delta) \{ |u|_{r, \omega} + |Pu|_{r-1, \Omega} + |u|_{r-\varepsilon, \Omega} + |u|_{r-\sigma+1} \}$$

où, par exemple,  $|u|_{r, \omega} = |Hu|_r$  où  $H$  est un pseudo-différentiel d'ordre 0, à symbole nul hors de  $\omega$ . Nous ferons trois remarques :

a) Si cette inégalité est valable pour une valeur  $r_0$ , elle est valable quel que soit  $r$ . Il suffit de l'appliquer à  $Eu$  où  $E$  est elliptique d'ordre  $r - r_0$ , et d'utiliser le calcul symbolique pour estimer l'action sur  $u$  des (bi)-commutateurs.

b) Si cette inégalité est valable, on a :

$u \in H^r(\omega)$ ,  $u \in H^{r-\sigma+1}$ ,  $u \in H^{r-\varepsilon}$ ,  $Pu \in H^r(\Omega)$  implique  $u \in H^r$  au voisinage de  $\Gamma$ . On l'applique en effet à  $(1 - \alpha_\Delta)^{-1}u = u_\alpha$  et on fait tendre  $\alpha$  vers 0, l'estimation des (bi)commutateurs montrant que le membre de droite reste borné. Le théorème 8 en résulte alors de façon évidente.

c) Il suffit en fait de démontrer l'inégalité

$$(**) \quad |K_\delta u|_0 \leq c(\delta) |K_\delta Pu|_0 + M(\delta) \{ |u|_{0,\omega} + |u|_{-\varepsilon} \} .$$

On obtiendra en effet (\*) pour  $r = 0$  en appliquant (\*\*) à  $E_0 u$ , où  $E_0$  est un pseudo-différentiel d'ordre 0, à symbole nul hors de  $\Omega$  et égal à 1 sur le support de  $K_\delta$ .

La démonstration de (\*\*) est alors facile. On a :

$$|\operatorname{Im}(PK_\delta u, K_\delta u)| \leq C^{te} |K_\delta u|_0^2$$

$$\operatorname{Im}(PK_\delta u, K_\delta u) = \operatorname{Im}(K_\delta Pu, K_\delta u) + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i} K_\delta^* [P, K_\delta] u, u\right)$$

$$\pm \frac{1}{i} K_\delta^* [P, K_\delta] = \frac{1}{\delta} K_\delta^* K_\delta + S_1 + S_2$$

avec  $S_i \in \operatorname{Op}(\Sigma_{\sigma-1}^0)$ , le symbole principal de  $S_1$  étant positif, le symbole de  $S_2$  étant nul hors de  $\omega$ . On en déduit :

$$1/\delta |K_\delta u|_0^2 + \operatorname{Re}(S_1 u, u) \leq C_0 (|K_\delta u|_0^2 + |K_\delta Pu|_0^2 + M(|u|_{0,\omega}^2 + |u|_{\frac{1-\delta}{2}}^2)) ,$$

avec  $C_0$  indépendante de  $\delta$ , et (\*\*) résulte alors de la forme suivante de l'inégalité de Gårding précisée.

**Théorème 9** : Soit  $S \in \operatorname{Op}(\Sigma_\tau^m)$ ,  $\tau > 0$ . On suppose le symbole principal  $s_m(x, \xi) \geq 0$ . Il existe alors  $\mu > 0$  tel que

$$\operatorname{Re}(Su, u) \geq -C^{te} |u|_{m/2-\mu/2} .$$

En utilisant des opérateurs  $A^*SA$ , avec  $A$  elliptique d'ordre convenable, on se ramène à démontrer le théorème pour une valeur particulière de  $m$ . Nous prendrons  $m = \mu$  avec  $\mu = 1$  si  $\tau > 2$  et  $\mu < \tau/2$  sinon.

On peut montrer que  $S - s_\mu(x, D)$  applique alors  $L^2$  dans  $L^2$ , et il suffit donc de prouver que

$$\operatorname{Re}(s_\mu(x, D)u, u) \geq -C^{\text{te}} |u|_0^2.$$

On conclut en adaptant la démonstration de Cordoba-Fefferman [3]. Avec leurs notations, on a  $(W^{-1}s_\mu W u, u) \geq 0$ , et la différence entre  $s_\mu(x, D)$  et  $W^{-1}s_\mu W$  se révèle être un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole  $r(x, \xi)$  vérifie (pour  $\tau < 2$ )

$$|\xi|^{|\alpha|} \|D_\xi^\alpha r(\cdot, \xi)\|_{p/2-\mu} \leq C_\alpha$$

la norme étant prise dans l'espace  $C^{\rho/2-\mu}$ . Un théorème de Coifman-Meyer [2] assure alors que  $r(x, D)$  applique  $L^2$  dans  $L^2$ , ce qui établit le résultat.

- 
- [1] J. M. Bony : Localisation et propagation des singularités pour les équations non linéaires. Actes Journées E.D.P. St Jean-de-Monts (1978).
- [2] R. Coifman, Y. Meyer : Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque 57 (1978).
- [3] A. Cordoba, C. Fefferman : Wave packets and Fourier integral operators. Comm. P. D. E. (1978).
- [4] L. Hörmander : On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations. L'enseignement Math. 17 (1971) 99-163.
- [5] B. Lascar : Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. C. R. Acad. Sc. Paris (1978).
- [6] J. Rauch : Journ. Math. Pures Appl. (A paraître).