

ALAIN GRIGIS

**Propagation des singularités pour des opérateurs pseudodifférentiels  
à caractéristiques doubles**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1979), p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1979\\_\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979___A16_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PROPAGATION DES SINGULARITES POUR DES OPERATEURS  
PSEUDODIFFERENTIELS A CARACTERISTIQUES DOUBLES

par A. GRIGIS

1. Soit  $X$  une variété  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$ , et  $\omega = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$  la 2-forme canonique sur  $T^*X$ . On considère une sous-variété conique  $\Sigma$  de  $T^*X$  vérifiant

(1.1)  $\omega|_\Sigma$  est de rang constant (on supposera ce rang non maximum pour éviter un cas trivial)

(1.2) le champ radial n'est orthogonal pour  $\omega$  à  $T\Sigma$  en aucun point de  $\Sigma$ .

Proposition 1 : La variété  $\Sigma$  admet un feuilletage canonique. L'espace tangent à une feuille  $\Gamma$  est  $T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega}$ , il est transverse au champ radial .

En effet  $T\Sigma \cap T\Sigma^{\perp\omega}$  est le radical de  $\omega|_\Sigma$  qui est une 2-forme fermée.

On considère maintenant un opérateur pseudodifférentiel classique  $P$  elliptique en dehors de  $\Sigma$  et dont le symbole principal  $p_m$  (supposé réel positif) s'annule exactement à l'ordre 2 sur  $\Sigma$ .

On impose de plus une condition sur le terme d'ordre  $m-1$  de  $P$ , condition qui s'exprime ainsi de manière invariante :

$$(1.3) \quad I_2(P) + \sum \lambda_j = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

(on a noté  $I_2(P)$  le symbole sous-principal de  $P$  et  $\lambda_j$  les réels positifs tels que  $\pm i\lambda_j$  soient les valeurs propres non nulles de la matrice hamiltonienne de  $p_m$  comptées avec leur multiplicité).

On sait d'après [3], [4], [6] que  $P$  n'est pas hypoelliptique avec perte d'une dérivée (il faudrait  $I_2(P) + \sum \lambda_j > 0$ ).

**Théorème** : Soit  $P$  vérifiant les hypothèses ci-dessus. Si  $u \in \mathcal{D}'(X)$   
 $Pu \in C^\infty(X)$  et si  $\rho \in WF(u)$  alors  $\Gamma_\rho \subset WF(u)$ , où  $\Gamma_\rho$  désigne la feuille ca-  
 nonique passant par  $\rho$ .

On dit que  $P$  propage les singularités sur les feuilles canoniques.

Dans le cas où la variété  $\Sigma$  est involutive, le résultat est dû à J. Sjöstrand [9]. Notre démonstration consiste à se ramener à ce cas. La condition (1.3) est dite "condition de Lévi". Si elle n'est pas vérifiée, alors on a des phénomènes de propagation le long de courbes tracées sur les feuilles caractéristiques, semblables à ceux étudiés par R. Lascar [7] et L. Boutet de Monvel [2].

## 2. Modèle microlocal

On travaille microlocalement et à l'aide d'un opérateur intégral de Fourier elliptique, on se ramène au modèle suivant :  $P_0$  + perturbation  $P'$ . On pose

$$Y = \mathbf{R}_y^{n-d'} = \mathbf{R}_{y'}^{n-d'-d''} \times \mathbf{R}_{y''}^{d''}$$

$$X = \mathbf{R}_x^n = \mathbf{R}_t^{d'} \times Y$$

$$(2.1) \quad P_0 = \sum_{1 \leq j, j' \leq d'} a_{jj'}(y, D_{y'}) Z_j Z_{j'}^* + \sum_{\substack{|\alpha|=2 \\ \alpha \in \mathbf{N}^{d''}}} b_\alpha(y, D_{y'}) D_{y''}^\alpha$$

où

$$Z_j = D_{t_j} + it_j |D_{y'}| \quad j = 1, \dots, d'$$

et  $a_{jj'}$ , et  $b_\alpha$  sont des symboles homogènes (qu'on supposera de degré -1) ne dépendant que de  $(y', y'', \eta')$ .

La matrice  $a_{jj'}$ , est hermitienne définie positive, ses valeurs propres sont les invariants  $\lambda_j |\eta'|^{-1}$ , et la matrice  $(b_\alpha)$  est réelle définie positive.

La variété caractéristique  $\Sigma : t = \tau = \eta'' = 0$  vérifie (1,1) et (1,2) et  $P_0$  vérifie la condition de Lévi.

La perturbation  $P'$ , inévitable, est un opérateur pseudodifférentiel classique de degré 1 dont le symbole principal s'annule à l'ordre 3 sur  $\Sigma$  et le terme suivant à l'ordre 1 (si bien que la condition de Lévi n'est pas perturbée!)

Dans la suite, on étudie l'opérateur  $P = P_0 + P'$ , et on montre qu'il propage les singularités "en  $y$ ".

### 3. Hypoellipticité fine

L'opérateur  $P$  n'est pas hypoelliptique avec perte d'une dérivée. Pourtant on va d'abord montrer de l'hypoellipticité dans des voisinages quasihomogènes.

Considérons l'opérateur

$$(3.1) \quad A = A(t, D_t) = \sum_{1 \leq j, j' \leq d'} a_{jj'} (D_{t_j} + it_j) (D_{t_{j'}} - it_{j'})$$

où  $a_{jj'}$  est une matrice hermitienne définie positive.

$C'$  est un opérateur autoadjoint sur  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{d'})$  qui a pour valeurs propres  $\sum_{j=1}^{d'} 2\alpha_j \lambda_j$  ( $\alpha_j$  entiers  $\geq 0$ ,  $\lambda_j$  valeurs propres de  $(a_{jj'})$ ).

L'opérateur  $A$  n'est pas inversible (0 est valeur propre!) mais si  $b$  est  $> 0$ , l'opérateur  $A + b$  est inversible.

Posons maintenant

$$(3.2) \quad P_0^G = \sum a_{jj'}(y, \eta') (D_{t_j} + it_j |\eta'|) \chi (D_{t_{j'}} - it_{j'} |\eta'|) + \sum_{|\alpha|=2} b_\alpha(y, \eta') \eta''^\alpha$$

Considérant  $P_0^G$  comme un opérateur sur  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{d'})$  dépendant des paramètres  $(y, \eta', \eta'')$  on voit que  $P_0^G$  est inversible si  $\eta'' \neq 0$ .

D'autre part si on pose  $\mathcal{D}_\lambda : \mathcal{S}(\mathbf{R}^{d'}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^{d'})$  défini par

$$(\mathcal{D}_\lambda f)(t) = \lambda^{d'/4} f(\lambda^{1/2} t)$$

on a

$$(3.4) \quad P_0^G(y, \lambda \eta', \lambda^{1/2} \eta'') \circ \mathcal{D}_\lambda = \mathcal{D}_\lambda \circ P_0^G(y, \eta', \eta'') \quad \lambda > \eta \quad |\eta'| > 1$$

Utilisant un inverse de  $P_0^G$  on peut construire une paramétrix de  $P$  dans tout ouvert quasi homogène du type

$$V \cap \{|\eta''|^2 > \varepsilon |\eta'|\} \quad \varepsilon > 0$$

où  $V$  est un ouvert conique dans  $T^*X$  (la quasi homogénéité est liée aux dilatations  $(t, y; \tau, \eta', \eta'') \mapsto (t, y; \lambda \tau, \lambda \eta', \lambda^{1/2} \eta'')$ ).

#### 4. Réduction au cas involutif

On utilise une méthode due à Grusin et utilisée dans [8] et [5].

L'opérateur A (3.1) n'est pas inversible, son noyau et son conoyau sont de dimension un, engendrés tous deux par la fonction :

$$(4.1) \quad h_0(t) = \pi^{d'/4} e^{-t^2/2}, \quad (t^2 = \sum_{j=1}^{d'} t_j^2).$$

On définit les opérateurs

$$(4.2) \quad \begin{aligned} F^+ : z \in \mathbb{C} &\rightarrow z h_0(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'}) \\ F^- : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'}) &\mapsto \int h_0(t) f(t) dt \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

On vérifie aisément que le système

$$\begin{pmatrix} A & F^+ \\ F^- & 0 \end{pmatrix}$$

est une bijection sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'}) = \mathbb{C}$  et admet un inverse qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} F & F^+ \\ F^- & 0 \end{pmatrix}$$

avec F opérateur pseudodifférentiel de degré -2 .

Si b est une constante de module assez petit ( $|b| < \inf \lambda_j$ ), le système

$$\begin{pmatrix} A + b & F^+ \\ F^- & 0 \end{pmatrix}$$

admet aussi un inverse

$$(4.3) \quad \begin{pmatrix} F & F^+ \\ F^- & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j b^j \begin{pmatrix} F^{j+1} & F^j F^+ \\ F^- F^j & F^- F^{j-1} F^+ \end{pmatrix}$$

L'opérateur de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j b^j F^- F^{j-1} F^+$ , mesure l'effet de A + b sur la fonction  $h_0$  .

Suivant ces considérations on envisage le système opérant de  $\mathcal{C}_0^\infty(X) \times \mathcal{C}_0^\infty(Y)$  dans  $\mathcal{C}^\infty(X) \times \mathcal{C}^\infty(Y)$  :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & H \\ H^* & 0 \end{pmatrix}$$

où  $H$  est l'opérateur de Hermite (au sens de [1]) défini ainsi

$$Hf(t,y) = \int e^{iy|\eta'|} |\eta'|^{d'/4} h_0(t|\eta'|^{1/2}) d\eta$$

et  $H^*$  est l'adjoint de  $H$ .

On montre que le système  $\mathcal{P}$  admet une paramétrix

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E^+ \\ E^- & E^\pm \end{pmatrix}$$

dans un voisinage quasihomogène de  $\Sigma : V \cap \{|\eta''|^2 < \varepsilon_0 |\eta'|\}$  (où  $V$  est un ouvert conique de  $T^*X$ ). Le terme  $E^+$  ( $E^-$ ) est un opérateur de Hermite (adjoint), et  $E^\pm$  est un opérateur pseudodifférentiel sur  $Y$  à caractéristiques doubles sur  $\Sigma : \eta'' = 0$  qui dans le voisinage où il est défini admet le développement

$$E^\pm = \sum_{|\alpha| \leq 2} C_\alpha(y, D_y) D_{y''}^\alpha$$

les  $C_\alpha$  sont quasihomogènes au sens de [7] de degré  $-1$ .

Le point important est que  $E^\pm$  vérifie la condition de Lévi (c'est à dire que le terme de degré quasihomogène  $-\frac{1}{2}$  s'annule sur  $\Sigma$ ).

## 5. Propagation des singularités

On peut appliquer le résultat de Sjöstrand à l'opérateur  $E^\pm$  avec de petites modifications car  $E^\pm$  n'est pas classique.

Donc  $E^\pm$  propage les singularités "en  $y$ ".

On en déduit le résultat pour  $P$  en considérant les identités

$$EP + E^+ H^* \equiv I$$

$$E^- P + E^- H^* \equiv 0$$

Le théorème est démontré. On peut montrer de plus que  $P$  n'est pas hypoelliptique.

- [1] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators, C.P.A.M. 27 (1974) pp.585-639.
- [2] L. Boutet de Monvel : Propagation des singularités des solutions d'équations analogues à l'équation de Schrödinger, Springer Lecture Notes 459 (1975) pp.1-14.
- [3] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer : Parametrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples, Astérisque 34-35 (1976) pp.93-121.
- [4] A. Grigis : Hypoellipticité et parametrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles, Astérisque 34-35 (1976) pp.183-205.
- [5] B. Helffer : Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (perte de  $3/2$  dérivées), Bull. Soc. Math. France 51-52 (1977) pp.13-61.
- [6] L. Hörmander : A class of hypoelliptic pseudodifferential operators with double characteristics, Math. Ann. 217 (1975) pp.165-188.
- [7] R. Lascar : Propagation des singularités des solutions d'équations quasihomogènes, Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble 27-2 (1977) pp.79-123.
- [8] J. Sjöstrand : Parametrixes for pseudodifferential operators with multiple characteristics, Arkiv för Mat. 12 (1974) pp.85-130.
- [9] J. Sjöstrand : Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics, Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble 26-1 (1976) pp.141-155.

\*\*\*