

CLAUDE ZUILY

Unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques de multiplicité constante

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979___A12_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR UNE CLASSE
D'OPERATEURS DIFFERENTIELS A CARACTERISTIQUES
DE MULTIPLICITE CONSTANTE

par C. ZUILY

On se propose de donner ici des conditions suffisantes portant sur les symboles principal et sous-principal d'un opérateur différentiel P , pour avoir l'unicité du problème de Cauchy à partir d'une surface non caractéristique. Cela généralise les résultats obtenus par W. Matsumoto dans [3]. Les détails seront publiés ultérieurement.

Soit S une hypersurface de \mathbf{R}^n , x_0 un point de S , φ une fonction C^∞ telle que

$$S = \{x : \varphi(x) = 0\} : \varphi(x) = 0, \quad d\varphi \neq 0 \quad \text{sur } S.$$

On se donne un opérateur différentiel P d'ordre m , dans un voisinage V_{x_0} de x_0 , tel que p_m et p'_{m-1} (symboles principal et sous-principal) soient à coefficients C^∞ dans V_{x_0} et les termes d'ordre $\leq m-2$ dans $L^\infty(V_{x_0})$. On considère les solutions classiques du problème

$$(*) \quad \begin{cases} Pu = 0 & \text{dans } V_{x_0} \\ (\frac{\partial}{\partial \nu})^j u|_S = 0 & 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu}$ est la dérivée normale à la surface S supposée non caractéristique pour P au voisinage de x_0 .

Nous noterons H_φ le hamiltonien de la fonction φ , i.e.

$$H_\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

On a alors le :

Théorème 1 : On suppose que l'opérateur P est elliptique dans V_{x_0} et que

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ non parallèle à $N = \text{grad } \varphi(x)$, $x \in S$ on a

$$(H.1) \quad \begin{cases} p_m(x, \xi + \tau N) = \prod_{j=1}^k (\tau - \lambda_j(x, \xi; N))^{m_j}, \quad m_j \geq 2, \quad \tau \in \mathbb{C}, \text{ avec} \\ |\lambda_j(x, \xi, N) - \lambda_{j'}(x, \xi, N)| \geq C_0 > 0, \quad \Psi(x, \xi) \in V_{x_0} \times S^{n-1}, \quad \Psi_j \neq j' \end{cases}$$

(H.2) Il existe des entiers k_1, k_2 , $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq k$ tels que

- (i) $p'_{m-1}(x, \xi + \tau N)|_{\tau=\lambda_j} \neq 0 \quad \Psi(x, \xi) \in V_{x_0} \times S^{n-1} \quad 1 \leq j \leq k_1$
- (ii) $p'_{m-1}(x, \xi + \tau N)|_{\tau=\lambda_j} \equiv 0$ et $H_\varphi(p'_{m-1})(x, \xi + \tau N)|_{\tau=\lambda_j} \neq 0$
 $\Psi(x, \xi) \in V_{x_0} \times S^{n-1}$, $k_1 + 1 \leq j \leq k_2$
- (iii) $p'_{m-1}(x, \xi + \tau N)|_{\tau=\lambda_j} = H_\varphi(p'_{m-1})(x, \xi + \tau N)|_{\tau=\lambda_j} \equiv 0$,
 $H_\varphi^2(p'_{m-1})(x, \xi + \tau N)|_{\tau=\lambda_j} \neq 0$, $\Psi(x, \xi) \in V_{x_0} \times S^{n-1}$, $k_2 + 1 \leq j \leq k$.

Il existe alors un voisinage W_{x_0} de x_0 tel que toute solution du problème (*) s'annule identiquement dans W_{x_0} .

Théorème 2 : Supposons que la partie principale de P soit réelle et que

(H.1) identique à celle du théorème 1

(H.2)' Si une racine $\lambda_j(x, \xi, N)$ est réelle en un point, elle est réelle pour tout $(x, \xi) \in V_{x_0} \times S^{n-1}$.

(H.3)' Il existe un entier k_1 , $0 \leq k_1 \leq k$ tel que

- (i) $\text{Im } p'_{m-1}(x, \xi + \tau N)|_{\tau=\lambda_j} \neq 0 \quad \Psi(x, \xi) \in V_{x_0} \times S^{n-1}$, $1 \leq j \leq k_1$
- (ii) $p'_{m-1}(x, \xi + \tau N)|_{\tau=\lambda_j} \equiv 0$ et $\text{Im } H_\varphi(p'_{m-1})(x, \xi + \tau N)|_{\tau=\lambda_j} \neq 0$,
 $\Psi(x, \xi) \in V_{x_0} \times S^{n-1}$, $k_1 + 1 \leq j \leq k$.

Il existe un voisinage W_{x_0} de x_0 tel que toute solution du problème (*) s'annule identiquement dans W_{x_0} .

Exemples et remarques

1) Lorsque la partie principale p_m contient des facteurs réels (th.2) on

ne peut pas se permettre de faire l'hypothèse (iii) du théorème 1. En effet d'après L. Hörmander [1] il existe $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $u \in C^\infty$, $\text{supp } u = \{(x, t) : t \geq 0\}$ et

$$Pu = (\partial_t^3 + \alpha \partial_t^2 + a(x, t) \partial_x)u = 0 \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

2) Par contre le théorème 2 fournit l'unicité pour

$$p = \partial_t^3 + a \partial_x \partial_t + b \partial_t + c \partial_x + d$$

$$\text{Im } a \neq 0, \quad a \in C^\infty, \quad b, c, d \in L^\infty.$$

3) Soit dans \mathbb{R}^2 l'opérateur

$$P_0 = (\partial_t - i \partial_x)^6 + a \partial_t^j (\partial_t - i \partial_x)^k$$

$j + k = 5$, $k \leq 2$. Si $a(x, t) \neq 0$ il y a unicité pour l'opérateur

$$P = P_0 + \sum_{j+k \leq 4} a_{jk}(x, t) \partial_t^j \partial_x^k$$

et $S = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}$.

Nous allons donner les principales étapes de la preuve. Nous nous bornerons pour simplifier aux cas (i). Par changement de coordonnées on peut se ramener au cas où

$$\text{supp } u \subset \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ : t \geq A|x|^2\}$$

en gardant les hypothèses. On commence par prouver le

Lemme 3 : ([2], [3]) Sous les conditions des théorèmes 1 et 2, il existe $R > 0$ tel que

$$(p_m + p'_{m-1})(x, t; \xi, \tau) = \prod_{p=1}^k \prod_{j=1}^{m_p} (\tau - \lambda_p^{(j)}) \quad , \quad |\xi| \geq R$$

où pour $p = 1, \dots, k$

$$\lambda_p^{(j)} = \lambda_p + \sum_{q=1}^{\infty} v_{p,q}^{(j)}(x, t; \xi) |\xi|^{1-k/m_p}, \quad |\xi| \geq R, \quad 1 \leq j \leq m_p,$$

où les $v_{p,q}^{(j)}$ sont des symboles d'ordre zéro et

$$v_{p,1}^{(j)}(x,t;\xi) = \left(\frac{-\tilde{p}'_{m-1} | \tau = \lambda_p }{\prod_{j \neq p} (\tilde{\lambda}_p - \tilde{\lambda}_j)^{m_j}} \right)^{1/m_p} (j)$$

où $\tilde{a}(x,\xi) = a(x, \frac{\xi}{|\xi|})$.

Introduisons quelques notations

$$\partial_p^{(j)} = D_t - \Lambda_p^{(j)}(x,t;D_x) \text{ où } \sigma(\Lambda_p^{(j)}) = \lambda_p^{(j)}.$$

On notera OPT^S les opd en x à symboles $a(x,t;\xi)$ dépendant de manière C^∞ de t et ayant un développement asymptotique $a \sim \sum a_j$, a_j homogène de degré $s - r_j$, $r_j \in \mathbf{R}^+$. Si $I = (i_1, \dots, i_q)$ on notera $q = |I|$ et

$$\partial_p^I = \partial_p^{(i_1)} \dots \partial_p^{(i_q)}$$

P_p^I désignera l'opd de symbole $(\tau - \lambda_p^{(i_1)}) \dots (\tau - \lambda_p^{(i_q)})$ et si A et B sont deux opd on notera $A \otimes B$ l'opd de symbole $a \cdot b$.

On a alors la :

Proposition 4 : Soient I_j des permutations de $\{1, 2, \dots, m_j\}$, $1 \leq j \leq k$.

Alors

$$\begin{aligned} \partial_1^{I_1} \circ \dots \circ \partial_p^{I_p} &= P_1^{I_1} \otimes \dots \otimes P_p^{I_p} + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} p_m \right) (x, D) + \sum_1 a_{J_1 \dots J_p} \partial_1^{J_1} \circ \dots \circ \partial_p^{J_p} + \\ &+ \sum_{s=0}^{m-2} b_s D_t^s \end{aligned}$$

où la somme \sum_1 porte sur les J_q tels que $J_q \subset I_q$ avec $\sum_1 |J_q| \leq \sum_1 m_q - 1$,

$$a_{J_1 \dots J_p} \in OPT^\sigma, \quad \sigma = \sum_1 m_q - \sum_1 |J_q| - 1 - \max_{1 \leq q \leq p} \left(\frac{(m_q - |J_q| - 1)^+}{m_q} \right), \quad a^+ = \sup(a, 0)$$

$$\text{et } b_s \in OPT^{m-2-s}$$

Corollaire 5 :

$$P_m(x, D) + P_{m-1}(x, D) = \partial_1^{I_1} \dots \partial_k^{I_k} + \sum_1 a_{J_1 \dots J_k} \partial_1^{J_1} \dots \partial_k^{J_k} + \sum_{s=0}^{m-2} b_s \circ D_t^s.$$

Le corollaire montre que si on a une bonne inégalité de Carleman pour $\partial_1^{I_1} \dots \partial_k^{I_k}$ on en déduira une pour $P_m + P_{m-1}$ et ensuite pour P . En effet l'étape suivante consiste à prouver le résultat suivant : posons

$$\|u\|_{(r,s)}^2 = \int_0^T \sum_{j=0}^r e^{\ell(t-T)} \|D_t^j u\|_s^2 dt$$

on a alors la :

Proposition 6 : Soient I_1, \dots, I_k des permutations de $\{1, \dots, m_1\}, \dots, \{1, \dots, m_k\}$. Il existe des constantes positives C, k_0, τ_0, r_0, R telles que pour $\ell \geq k_0, T \leq T_0$, pour tout $u \in C^\infty$ avec $\text{supp } u \subset \{0 \leq t \leq T, |x| \leq r_0\}$, $\text{supp } \hat{u}(\xi, t) \subset \{|\xi| \geq R\}$ on ait

$$\sum_{J_q} \sum_j \| \partial_1^{J_1} \dots \partial_k^{J_k} u \|_{(\sigma-j, j)}^2 \leq \frac{C}{\ell} \| \partial_1^{I_1} \dots \partial_k^{I_k} u \|_{(0,0)}^2$$

où $J_q \subset I_q, \sum_1^k |J_q| \leq \sum_1^k m_q - 1; 0 \leq j \leq \sum_1^k m_q - \sum_1^k |J_q| - 1;$

$$\sigma = m - \sum_1^k |J_q| - 1 - \text{Max}_{1 \leq q \leq k} \left(\frac{(m_q - |J_q| - 1)^+}{m_q} \right).$$

Corollaire 7 : Avec les mêmes notations que dans la proposition 6

$$\sum_{j=0}^{m-1} \|u\|_{(m-2 + \frac{1}{\text{Max } m_q} - j, j)}^2 \leq \frac{C}{\ell} \|Pu\|_{(0,0)}^2$$

La preuve des théorèmes 1 et 2 à partir d'une telle inégalité est classique.

[1] L. Hörmander : Lecture Notes n° 459.

[2] S. Mizohata, Ohya : Japan Journ. Math. 40 (1971) p.63-104.

[3] W. Matsumoto : Journ. Math. Kyoto Univ. 15-3 (1975) p.479-525.