JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

G. BENGEL
PIERRE SCHAPIRA

Décomposition microlocale analytique des distributions

Journées Équations aux dérivées partielles (1978), p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A8_0>

Conférence n° 8

DECOMPOSITION MICROLOCALE ANALYTIQUE DES DISTRIBUTIONS

par G. BENGEL et P. SCHAPIRA

Soit M une variété analytique réelle dénombrable à l'infini. Désignons respectivement par $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{B}$ les faisceaux sur M des fonctions analytiques, des fonctions de classe C^∞, des distributions, des hyperfonctions. Nous définissons les sous-faisceaux C^f et C^d du faisceau C des microfonctions de M. Sato sur S^*M, le fibré cotangent en sphères à M, de la manière suivante :

soit $(x,\eta) \in S^*M$ et $u \in C_{(x,\eta)}$ alors $u \in C^f_{(x,\eta)}$ (resp. $C^d_{(x,\eta)}$) $\Leftrightarrow$ il existe $f \in \mathcal{D}'(M)$ (resp. $\mathcal{E}(M)$) dont le germe en (x,η) soit u.

On désigne par π la projection de S^*M sur M.

Définition : Soit X un espace topologique, G un faisceau de groupes abéliens sur X. Nous dirons que G est souple si pour tout ouvert Ω de G, tous fermés F_1 et F_2 de Ω, toute section u de G sur Ω à support dans $F_1 \cup F_2$ peut s'écrire $u = u_1 + u_2$ où u_i $(i = 1,2)$ est une section de G sur Ω à support dans F_i.

Nous démontrons :

Théorème : Les faisceaux C^f et C^d sont souples. De plus $\pi_* C^f \simeq \mathcal{D}'/\mathcal{A}$, $\pi_* C^d \simeq \mathcal{E}/\mathcal{A}$.

Corollaire 1 : Les faisceaux $\mathcal{D}'/\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}/\mathcal{A}$ sur M sont souples.

Si u est une hyperfonction sur M, désignons par SS(u) son support essentiel dans S^*M, c'est-à-dire le support de son image dans le faisceau C.

Corollaire 2 : Soit u_i $(i = 1,\dots,p)$ des distributions avec $\sum_i u_i = 0$. Soit $F_i = SS(u_i)$. Alors il existe des distributions $u_{i,j}$ $(i,j = 1,\dots p)$ telles que :

- $\forall i \quad u_i = \sum_{i \neq j} u_{i,j}$

- $SS(u_{i,j}) \subset F_i \cap F_j$

quand on interprète les distributions en terme de valeurs au bord de fonctions holomorphes, on retrouve une version précisée du théorème du "Edge of the Wedge" de A. Martineau.

La démonstration du théorème utilise les techniques de L. Hörmander de cohomologie à croissance (on résoud un problème de Cousin pour les fonctions holomorphes à croissance modérée sur le bord des ouverts), le théorème de J. Bros et D. Iagolnitzer qui assure que tout tuboïde sur $\mathbb{R}^n$ contient un tuboïde de même profil qui soit un ouvert d'holomorphie, et une représentation des distributions à l'aide d'un noyau de Radon non linéaire, représentation déjà utilisée par J. M. Bony.