

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JOHANNES SJÖSTRAND

**Valeurs propres pour des opérateurs hypoelliptique**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1978), p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1978\\_\\_\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A2_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

VALEURS PROPRES POUR DES OPERATEURS

HYPOELLIPTIQUES

par J. SJÖSTRAND

Ceci est un travail en collaboration avec A. Menikoff.

Soit  $X$  une variété  $C^\infty$  compacte de dimension  $n$ , munie d'une densité  $C^\infty$ , strictement positive. Soit  $P \in L_c^m(X)$ ,  $m > 1$ , de symbole principal  $p \geq 0$ .

On suppose :

- (1)  $P$  est formellement autoadjoint.
- (2)  $\Sigma = p^{-1}(0)$  est une sous-variété fermée de  $T^*X \setminus 0$ , de codimension  $d$ , et  $p$  s'annule d'ordre 2 exactement sur  $\Sigma$ .

Sur  $\Sigma$  on définit le symbole sous-principal

$$S_P = p_{m-1}(x, \xi) - \frac{1}{2i} \sum \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j}$$

(où le symbole complet en coordonnées locales est  $\sim p + p_{m-1} + p_{m-2} + \dots$ ).

Pour  $\rho \in \Sigma$  on définit la matrice fondamentale

$$F_\rho : T_\rho(T^*X \setminus 0) \rightarrow T_\rho(T^*X \setminus 0)$$

par  $\sigma(u, F_\rho v) = p_\rho''(u, v)$ ,  $\forall u, v \in T_\rho(T^*X \setminus 0)$ . Les valeurs propres non nulles de  $F_\rho$  sont de la forme  $\pm i\mu_1, \dots, \pm i\mu_k$ , ( $\mu_j > 0$ ,  $k = k(\rho)$ ). On pose  $\tilde{\text{Tr}} = \sum_1^k \mu_j$ .

On suppose :

- (3)  $S_P + \frac{1}{2} \tilde{\text{Tr}} > 0$  sur  $\Sigma$ .

En utilisant des résultats de A. Melin, Boutet de Monvel-Grigis-Helffer, Hörmander, on montre facilement que  $P$  est autoadjoint dans  $L^2$  avec domaine de définition  $\{u \in L^2 ; Pu \in L^2\}$  et que le spectre de  $P$  est discret et borné inférieurement. Si  $\theta = (\theta', \theta'')$  sont des coordonnées locales sur  $T^*X \setminus 0$  telles que  $\Sigma$  soit donnée par  $\theta'' = 0$  et  $d\theta = dx d\xi$ , alors la densité  $\omega'(d\theta') = \frac{d\theta'}{(\det p_{\theta''}''_{\theta''})^{1/2}}$  sur  $\Sigma$  ne dépend pas du choix de  $\theta$ . Si

$md - 2n = 0$ , cette densité est homogène de degré 0 et donne lieu à une densité invariante  $\tilde{\omega}'(d\tilde{\theta}')$  sur l'image  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  dans  $S^*X$ .

Si  $N(\lambda)$  est le nombre de valeurs propres de  $P$  qui sont  $\leq \lambda$ , nous avons le résultat suivant :

Théorème : 1) Si  $md - 2n > 0$ , alors

$$N(\lambda) = \frac{(1 + o(1))}{(2\pi)^n} \iint_{p(x, \xi) \leq 1} dx d\xi \cdot \lambda^{n/m}, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

2) Si  $md - 2n = 0$ , alors

$$N(\lambda) = \frac{(1 + o(1)) \cdot \lambda^{n/m} \log \lambda}{(2\pi)^{n-d/2} m \cdot (m-1) \Gamma(1 + \frac{n}{m})} \int_{\tilde{\Sigma}} \tilde{\omega}'(d\tilde{\theta}'), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

3) Si  $md - 2n < 0$ , alors

$$N(\lambda) = \frac{(1 + o(1)) \cdot \lambda^{\frac{n-d/2}{m-1}}}{(2\pi)^{n-d/2} \Gamma(1 + \frac{n-d/2}{m-1})} \int_{\Sigma} e^{-\left(\frac{1}{2} \tilde{\text{Tr}} + S_P\right) \pi \frac{\mu_j}{(1 - e^{-\mu_j})}} \omega'(d\theta')$$

La démonstration est basée sur la formule :

$$\text{tr}(e^{-tP}) = \int e^{-t\lambda} dN(\lambda).$$

Rappelons que le cas où  $\Sigma$  est symplectique a été traité dans

Menikoff-Sjöstrand "On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators". A paraître dans Math. Annalen.

