

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD HELFFER

JEAN NOURRIGAT

## **Hypoellipticité pour des opérateurs différentiels sur des groupes de Lie nilpotents**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1978), p. 1

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1978\\_\\_\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978___A1_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

HYPOELLIPTICITE POUR DES OPERATEURS  
DIFFERENTIELS SUR DES GROUPEs  
DE LIE NILPOTENTS

par B. HELFFER et J. NOURRIGAT

On considère un groupe de Lie  $G$  nilpotent, connexe, simplement connexe dont l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$  admet une décomposition en somme directe de sous-espaces :

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{G}_r$$

tels que  $[\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] \subset \mathfrak{G}_{i+j}$ , en convenant que  $\mathfrak{G}_{i+j} = 0$  si  $i+j > r$ . On associe à cette décomposition un groupe de dilatations  $\delta_t$  sur  $G$ . Soit  $P$  un opérateur différentiel sur  $G$ , invariant à gauche, homogène de degré  $m$  pour les dilatations  $\delta_t$ . (On identifie  $P$  à un élément de l'algèbre enveloppante universelle complexifiée de  $G$ ). Rockland a conjecturé l'équivalence des deux propriétés suivantes :

i)  $P$  est hypoelliptique dans  $G$

ii) Pour toute représentation  $\square$ , unitaire, irréductible, non triviale de  $G$ , l'opérateur  $\square(P)$  est injectif dans  $\mathcal{S}_{\square}$  (où  $\mathcal{S}_{\square}$  désigne l'espace des vecteurs  $C^\infty$  de la représentation).

L'implication i)  $\Rightarrow$  ii) a été démontrée par Beals, et le réciproque ii)  $\Rightarrow$  i), dans le cas où  $r = 2$ , par Beals et Helffer. Nous nous proposons de démontrer l'implication ii)  $\Rightarrow$  i) dans le cas général.

La démonstration repose sur des estimations a priori pour les opérateurs images de  $P$  par des représentations induites à partir de sous-algèbres de  $G$ , et dépendant de certains paramètres.

L'une des motivations de cette étude est le fait que, par des techniques d'addition de variables, on peut obtenir, à partir du résultat d'hypoellipticité sur un groupe de Lie, des conditions suffisantes d'hypoellipticité pour des classes plus générales d'opérateurs différentiels.

---