Journées Équations aux dérivées partielles

Gerd Grubb

Sur la théorie spectrale des problèmes aux limites pseudo-différentiels elliptiques

Journées Équations aux dérivées partielles (1978), p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A14_0>

SUR LA THEORIE SPECTRALE DES PROBLEMES AUX LIMITES PSEUDO-DIFFERENTIELS ELLIPTIQUES

par G. GRUBB

Soit P un opérateur pseudo-différentiel classique, opérant dans un fibré vectoriel E sur une variété Σ, compacte, de dimension n et sans bord ; soit $\Omega \subset \Sigma$ et soit P_Ω la restriction de P à Ω $(P_\Omega u = (P\tilde{u})|_\Omega)$. P est supposé auto-adjoint et fortement elliptique (et positif), d'ordre $\ell > 0$. Si P a la propriété de transmission par rapport à $\partial\Omega$ (et $\ell = 2m$, m entier) on peut étudier les réalisations $(P+G)_T$ de $P_\Omega + G$ dans $L^2(\Omega, E)$, de domaine

$$D((P+G)_T) = \{u \in H^\ell(\Omega, E) \,|\, Tu = 0\} \quad ,$$

où T et G sont des opérateurs de trace, resp. de Green singulier, convenables. Exemple : P_γ, la réalisation de Dirichlet. L'étude de ces réalisations permet des manipulations avec des problèmes différentiels, par exemple la réduction d'un système de Douglis-Nirenberg à un système o.ps.d. d'un seul ordre [3], l'étude de $Au = \lambda Bu$ avec A et B elliptiques, le problème considéré dans [1], étudié là par d'autres moyens.

Pour la théorie spectrale nous étudions la résolvante R_λ. L'étude pour $|\lambda| \to \infty$ dans un <u>secteur</u> $W = \{\lambda = re^{i\theta} \,|\, r \geq 1,\ 0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \pi\}$ présentée dans [4], [3], conduit à l'estimation principale du nombre N(t) de valeurs propres inférieurs à t, et servirait aussi à l'étude des puissances complexes, l'indice, des équations d'évolution. On a montré dans [4] la décomposition suivante

$$R_\lambda = (P - \lambda I)_\Omega^{-1} + G_\lambda \quad ,$$

où G_λ est un opérateur de Green singulier, $(P - \lambda I)_\Omega^{-1}$ et G_λ ayant des développements en une somme finie de termes à symbole homogène plus un reste, satisfaisant à des estimations naturelles par rapport à la norme $\|u\|_{s,\mu} = (\|u\|_s^2 + \mu^{2s}\|u\|_0^2)^{1/2}$ où $\mu = |\lambda|^{1/\ell}$.

L'étude dans une "<u>région parabolique</u>" $V_\delta = \{\lambda \,|\, |\lambda| \geq 1, \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ ou $|\mathrm{Im}\,\lambda| \geq |\lambda|^{1-\delta/\ell}\}$ conduit à des estimations plus fines de N(t) (et de la fonction spectrale). Nous avons complété ce travail pour le cas sans bord [5] (sans hypothèses sur la multiplicité des valeurs propres de $p^o(x,\xi)$ comme dans [6], [2]) en démontrant pour $\ell \in \mathbb{R}_+$:

$$(1) \qquad \forall \varepsilon\ ,\ N(t,P) = C_P t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-1/2+\varepsilon)/\ell}) \quad \text{pour} \quad t \to \infty\ ,$$

$$(2) \qquad \operatorname{tr} e(t;x,x) = C_P(x) t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-1/2+\varepsilon)/\ell}) \quad \text{pour } t \to \infty\ ,$$

(uniformément sur Σ), où

$$C_P(x) = \frac{1}{n(2\pi)^n} \int_{S_x} \operatorname{tr}[p^o(x,\xi)^{-n/\ell}]\, d\omega\ ,\quad C_P = \int_{\Sigma} C_P(x)\,dx\ ,$$

avec un résultat pareil pour les systèmes pseudo-différentiels fortement elliptiques de Douglis-Nirenberg.

Une difficulté dans la démonstration est que les dérivées en ξ de $(p^o(x,\xi) - \lambda I)^{-1}$ ont un bon comportement seulement jusqu'à l'ordre ℓ. On ajoute $\mu = |\lambda|^{1/\ell}$ comme variable cotangente, pour utiliser le théorème de Calderon-Vaillancourt (amélioré par Kato [7]) dans $\mathbb{R}^{n+1}$, qui exige seulement $[(n+1)/2] + 1$ dérivées en ξ ; cela entraîne des estimations dans $\mathbb{R}^n$ dans les normes $\|u\|_{s,\mu}$. Pour obtenir (1), (2) pour P on a besoin d'augmenter l'ordre (en remplaçant P par P^r) de manière que $r\ell > \varepsilon^{-1} n$. La généralisation aux problèmes aux limites est encore "work in progress".

Références

[1] A. B. Alekseev, M. S. Birman , Soviet Math. Dokl. 17 (1976), 1319-22.

[2] J. J. Duistermaat, V. W. Guillemin, Invent. Math. 29 (1975), 39-79.

[3] G. Grubb, Comm. Part. Diff. Equ. 2 (1977), 1071-1150.

[4] G. Grubb, Exposé XIV, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1977-78.

[5] G. Grubb : Remainder estimates for eigenvalues and kernels of pseudo-differential elliptic systems (pour Math. Scand.)

[6] L. Hörmander, Acta Math. 121 (1968), 193-218.

[7] T. Kato, Osaka J. Math. 3 (1976), 1-9 .