Journées Équations aux dérivées partielles

DANIEL GOURDIN

Systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable

Journées Équations aux dérivées partielles (1978), p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A11_0>

Conférence n° 11

SYSTEMES HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE

par D. GOURDIN

Le point générique du fibré cotangent $T^*(\mathbb{R}^{n+1})$ étant désigné par $(x;\xi)$ avec $x = (x^o, x') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ et $\xi = (\xi_o, \xi') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, les opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^{n+1}$ hyperboliques par rapport au champ de covecteurs noté $\mathfrak{I} = (\mathfrak{I}_x)_{x\in\mathbb{R}^{n+1}}$ avec $\mathfrak{I}_x \in T^*_x(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}^{n+1}$ de composantes $\xi_o = 1$ et $\xi' = 0$, ont leurs racines caractéristiques $\xi_o = p_o^j(x;\xi')$ réelles $(1 \leq j \leq \tau)$. Dans le cas d'une équation hyperbolique par rapport à $\mathfrak{I}$, les racines $p_o^j(x;\xi')$ étant simples sauf deux d'entre elles p_o^1 et p_o^τ qui peuvent prendre des valeurs égales en certains points $(x;\xi')$ tels que $\xi' \neq 0$, en notant $\Delta_j(x;\xi) = \xi_o - p_o^j(x;\xi')$ $(1 \leq j \leq \tau)$, V. M. Petkov [1] et Y. Ohya [2] ont résolu le problème de Cauchy non caractéristique dans les espaces de Sobolev et dans C^∞ lorsque le polynôme sous-caractéristique $\mathcal{K}$ et la parenthèse de Poisson $\{\Delta_1, \Delta_\tau\}$ s'annulent sur :

$$\Sigma = \{(x;\xi) \,;\, \xi_o = p_o^1(x;\xi') = p_o^\tau(x;\xi')\} \quad ;$$

Nishitani [3] a obtenu un résultat semblable en exhibant une condition où le rôle du sous-caractéristique et de la parenthèse de Poisson ne sont pas mis en évidence ; dans notre formulation cette condition s'exprime par l'annulation sur Σ de $\mathcal{K} - \frac{1}{2}\prod_{j=2}^{\tau-1}(\xi_o - p_o^j(x;\xi'))\{\Delta_1, \Delta_\tau\}$.

Dans notre travail [4], nous résolvons le problème de Cauchy non caractéristique dans les espaces de Sobolev et dans C^∞, pour un système hyperbolique dont deux racines caractéristiques p_o^1 et p_o^τ peuvent coïncider, sous une condition scalaire de la forme :

$$\mathcal{K} - C\{\Delta_1, \Delta_2\} \text{ ou } \mathcal{K} + C\{\Delta_1, \Delta_\tau\} \text{ nul sur } \Sigma \ ,$$

où $\mathcal{K}$ est un polynôme généralisant aux systèmes la notion de polynôme sous-caractéristique et $C = C(x;\xi)$ valant $\frac{1}{2}\prod_{j=2}^{\tau-1}(\xi_o - p_o^j(x,\xi'))$ dans le cas d'une seule équation ; notre condition est donc plus faible que celle de Nishitani et a fortiori plus faible que celles de Petkov et d'Ohya .

Remarquons que le passage d'une équation à un système introduit des complications non négligeables.

<u>Références</u>

[1] V. M. Petkov : Serdika, Journal bulgare de Mathématiques T1, 1975, p.372-380 .

[2] Y. Ohya : C. R. Acad. Sc. Paris t.282, série A, p.1433-1436 (1976).

[3] T. Nishitani : J. Maths Kyoto Univ. (JMKYAZ) 17-2 (1977) p.245-258.

[4] D. Gourdin : C. R. Acad. Sc. Paris, 17 avril 1978.