Journées Équations aux dérivées partielles

T. Hardin
Laville

Une généralisation du théorème de propagation des singularités pour les opérateurs à symbole principal réel

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 81-87
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____81_0>

UNE GENERALISATION DU THEOREME DE PROPAGATION DES SINGULARITES POUR LES OPERATEURS A SYMBOLE PRINCIPAL REEL

par

T. HARDIN et A. LAVILLE

Le but de cet exposé est de démontrer un résultat de propagation des singularités dans un cas généralisant la situation classique d'un opérateur à symbole principal réel : on suppose ici, essentiellement, que le hamiltonien de l'opérateur est proportionnel à une perturbation d'un champ de vecteurs de l'espace cotangent, homogène sous l'action d'un groupe de tranformations de cet espace. On se limite dans ce travail au cas où ce groupe admet pour générateur infinitésimal l'opérateur $\mathcal{E} = \sum_{j,k} a_j^k \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ où la matrice (a_j^k) est constante et a toutes ses valeurs propres réelles strictement positives.

Le cas où cette matrice est diagonale et où l'opérateur considéré admet un symbole principal réel homogène sous l'action du groupe engendré par $\mathcal{E}$, a été traité par Richard LASCAR ([2] théorème 4. 1) ; le cas où en outre cette matrice est l'identité est le cas classique ([1] théorème 3. 2. 1).

Dans le théorème prouvé ici, la différence entre le hamiltonien complet de l'opérateur et sa partie principale homogène peut être assez importante, ce qui permet de traiter par exemple les opérateurs de symboles $\xi_1 + \frac{|\xi|}{\text{Log}|\xi|}$ ou bien $\xi_1^4 - |\xi|^2 = (\xi_1^2 + |\xi|)(\xi_1 - \sqrt{|\xi|})(\xi_1 + \sqrt{|\xi|})$.

0 - Notations et définitions

On pose $\mathcal{E} = \sum_{j,k=1}^{n} a_j^k \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_k}$, où la matrice constante (a_j^k) a toute ses valeurs propres réelles strictement positives ; on note λ la plus petite et ν la plus grande. On note $\Phi^t(x,\xi)$ le flot du champ de vecteurs $\mathcal{E}$ (dans le cas classique on a $\Phi^t(x,\xi) = (x, e^t\xi)$). Une partie A de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ sera dite $\mathcal{E}$-conique (resp. $\mathcal{E}$-semi conique) si l'on a $\Phi^t(A) \subset A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (resp. $t \geqslant 0$). Une partie $\mathcal{E}$-semi conique sera dite à base compacte si elle peut s'écrire $\bigcup_{t\geqslant 0} \Phi^t(B)$ où B est une partie compacte de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Une fonction f à valeurs complexes, définie sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ sera dite $\mathcal{E}$-homogène de degré m si

$$f \circ \Phi^t(x,\xi) = e^{mt} f(x,\xi)$$

ou encore (si f est de classe C^1) $\mathcal{E}f = mf$.

On appelle Σ un ellipsoïde dans $\mathbb{R}^n_\xi$ centré à l'origine et transverse au champ $\mathcal{E}$. Avec R. Lascar, on notera $[\xi]$ le prolongement $\mathcal{E}$-homogène de degré 1 de la fonction valant 1 sur Σ.

I - Classes de symboles, front d'onde et espaces de Sobolev associés à $\mathcal{E}$

Définition 1. 1 :

On appelle $S^m_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des fonctions a, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$, vérifiant la propriété suivante :
Pour toute famille finie $X_1 \dots X_p$ de champs de vecteurs, à coefficients C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$ et indépendants de x, commutant avec $\mathcal{E}$ pour $[\xi] \geqslant 1$, il existe une constante C telle que

$$|X_1 \dots X_p \, a\,(x,\xi)| \leq C\,(1 + [\xi])^m$$

On dira qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de $S^m_{\mathcal{E}}$ est bornée si la constante C ci-dessus ne dépend pas de l'indice i.

On montre que si ρ est un nombre réel vérifiant $\rho < \frac{\lambda}{\nu}$ on a l'inclusion

$$S^m_{\mathcal{E}} \subset \bigcap_{m'>M} S^{m'}_{\rho,o} \quad \text{où } M = \max\left(\frac{m}{\lambda}, \frac{m}{\nu}\right) ;$$

dans le cas m = 0 on a $S^o_{\mathcal{E}} \subset S^o_{\rho,o}$.

Proposition 1. 1

Notons Op(a) l'opérateur de symbole a,

$$\partial^\alpha_\xi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi_1^{\alpha_1} \dots \partial\xi_n^{\alpha_n}} \quad \text{et} \quad D^\alpha_x = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

On a le calcul symbolique suivant :

1) Si $a \in S^m_{\mathcal{E}}$ et si a^* est le symbole de $(Op(a))^*$, $a^* \in S^m_{\mathcal{E}}$ et
$$a^* - \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_x \partial^\alpha_\xi \bar{a} \in \bigcap_{m'>m-k\lambda} S^{m'}_{\mathcal{E}} .$$

2) si $a \in S_{\mathcal{E}}^{m_1}$ et $b \in S_{\mathcal{E}}^{m_2}$ et si aob est le symbole de Op(a) Op(b),

$$aob \in S_{\mathcal{E}}^{m_1+m_2} \quad \text{et} \quad aob - \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!} D_x^{\alpha} a \, \partial_{\xi}^{\alpha} b \in \bigcap_{m' > m_1+m_2-k\lambda} S_{\mathcal{E}}^{m'} .$$

Définition 1. 2 :

Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$; on définit $WF_{\mathcal{E}}(u)$ comme suit :

Soit $(x^o,\xi^o) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, on dit que $(x^o,\xi^o) \notin WF_{\xi}(u)$ si et seulement si il existe un voisinage $\mathcal{E}$-conique V de (x^o, ξ^o) tel que :
pour tout symbole $a \in S_{\mathcal{E}}^{o}$ vérifiant supp $a \subset V$

$$Op(a)\ u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) .$$

L'ensemble $WF_{\mathcal{E}}(u)$ est une partie $\mathcal{E}$-conique fermée de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ dont la projection dans l'espace des x est le support singulier de u.

Définition 1. 3 :

On définit $H_{\mathcal{E}}^{s}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des u éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vérifiant : $(1 + [\xi])^s\ \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

On vérifie que si a est élément de $S_{\mathcal{E}}^{n}$, Op(a) opère continuement de $H_{\mathcal{E}}^{s}(\mathbb{R}^n)$ dans $H_{\mathcal{E}}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$; de plus, si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille bornée d'éléments de $S_{\mathcal{E}}^{m}$ et si $u \in H_{\mathcal{E}}^{s}(\mathbb{R}^n)$, la famille $(Op(a_i)\ u)_{i\in I}$ est bornée dans $H_{\mathcal{E}}^{s-m}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1. 4 :

Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$; on dira que u est $H_{\mathcal{E}}^{s}$ en un point (x^o,ξ^o) de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ si et seulement si il existe un voisinage $\mathcal{E}$-conique V de (x^o,ξ^o) tel que pour tout symbole $a \in S_{\mathcal{E}}^{o}$ vérifiant supp $a \subset V$, $Op(a)\ u \in H_{\mathcal{E}}^{s}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1. 2 :

Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et soit $(x^o,\xi^o) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$; u est $H_{\mathcal{E}}^{s}$ en (x^o,ξ^o) si et seulement si il existe un voisinage $\mathcal{E}$-conique W de (x^o,ξ^o) tel que pour tout ensemble K, $\mathcal{E}$-semi conique à base compacte, contenu dans W, Re(Op(b) u, u) reste borné quand b, élément de $S^{-\infty}$, varie en gardant son support dans K et en restant borné dans $S_{\mathcal{E}}^{2s}$.

II - Hamiltonien principal et propagation des singularités

Définition 2. 1 :

Soit p_1 un symbole dans une classe $S^m_{\mathcal{E}}$. On dira que p_1 admet un hamiltonien principal en (x^o,ξ^o), s'il existe un voisinage $\mathcal{E}$-conique V de (x^o,ξ^o) tel que, dans V et pour $[\xi]$ assez grand, le champ de vecteurs

$$H_{p_1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_1}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p_1}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad \text{s'écrit} \quad H_{p_1} = e^{-\varphi}(\tilde{H} + \sum_{j=1}^{2n} f_j X_j)$$

où

- Les champs de vecteurs $\tilde{H}$ et X_j commutent avec $\mathcal{E}$ et $\tilde{H}$ est non nul en (x^o,ξ^o).
- Les fonctions f_j , éléments de $S^o_{\mathcal{E}}$, vérifient : $f_j \circ \Phi^t(x,\xi)$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$, uniformément sur tout compact contenu dans V.
- La fonction φ est un élément de $\bigcap_{m'>0} S^{m'}_{\mathcal{E}}$ et il existe une constante K telle que $|\varphi(x,\xi)| \leq K(1 + \mathrm{Log}[\xi])$ pour tout (x,ξ) avec $[\xi] \geqslant 1$.

On appelle alors $\tilde{H}$ le hamiltonien principal de p_1 et ses courbes intégrales sont appelées bicaractéristiques de p_1 .

Remarque : $\tilde{H}$ est unique à la multiplication près par une fonction $\mathcal{E}$-homogène de degré 0. Les bicaractéristiques sont donc intrinsèquement liées à p_1.

Théorème 2. 1 :

Soit P un opérateur pseudo différentiel de symbole $p_1 + iq_1$; on suppose que p_1 admet un hamiltonien principal en un point (x^o,ξ^o) de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et que, avec les notations de la définition 2. 1, $e^{-\varphi} q_1 \in S^o_{\mathcal{E}}$.

Soit ψ un élément de $\bigcap_{m'>0} S^{m'}_{\mathcal{E}}$, à valeurs réelles, vérifiant : il existe une constante K' telle que $|\psi(x,\xi)| \leq K'(1 + \mathrm{Log}[\xi])$ pour tout (x,ξ) avec $[\xi] \geqslant 1$.

On suppose de plus que $e^{-\varphi} H_{p_1}(2\psi - \varphi) \in S^o_{\mathcal{E}}$.

Soit I un segment de bicaractéristique de p_1 d'extrémités (x^1,ξ^1) et (x^2,ξ^2) ; soient s un nombre réel quelconque et δ un nombre réel vérifiant $0 < \delta < \lambda$, et soit enfin $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Supposons que $Op(e^{\psi-\varphi})Pu$ est $H^{s+\frac{\delta}{2}}_{\mathcal{E}}$ en tout point de I

et que $Op(e^{\psi})\, u$ est $H^s_{\mathcal{E}}$ en (x^2,ξ^2)

Alors : $Op(e^{\psi})\, u$ est $H^s_{\mathcal{E}}$ en (x^1,ξ^1).

Le démonstration de ce théorème utilise la proposition 1. 2 et le lemme suivant :

Lemme 2. 1 : Soit γ une fonction de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $e^{-\varphi}\gamma$ appartienne à $S^o_{\mathcal{E}}$ et soient V et V_2 deux ouverts $\mathcal{E}$-coniques contenant respectivement I et (x^2,ξ^2) ; alors il existe un voisinage $\mathcal{E}$-semi conique V_1 de (x^1,ξ^1) et une application $a \mapsto (b,f)$, définie pour tout $a \in S^{-\infty}$ tel que supp a soit contenu dans V_1, vérifiant les propriétés suivantes :

1) Pour tout a,b et f sont éléments de $S^{-\infty}$; supp b $\subset V_2$ et supp f $\subset$ V

2) $H_{p_1} f + \gamma f = e^{\varphi}(a - b)$

3) Si a varie en restant dans une partie bornée de $S^{2s}_{\mathcal{E}}$, b et f restent dans une partie bornée de $S^{2s}_{\mathcal{E}}$.

Démonstration du théorème 2. 1 :

Par récurrence, étant donné que le point (x^1,ξ^1) peut être remplacé par n'importe quel point de I, on peut supposer que $Op(e^{\psi})$ u est $H^{s-\frac{\delta}{2}}_{\mathcal{E}}$ en tout point de I. Soit alors $a \in S^{-\infty}$ à support dans V_1 et restant borné dans $S^{2s}_{\mathcal{E}}$. On pose $\gamma = 2i\pi\, e^{\varphi-2\psi}(e^{2\psi-\varphi} \circ p - p^* \circ e^{2\psi-\varphi})$. La condition $e^{-\varphi} H_{p_1}(2\psi - \varphi) \in S^o_{\mathcal{E}}$ assure que $e^{-\varphi}\gamma \in S^o_{\mathcal{E}}$. On peut écrire conformément au lemme 2. 1

$$a - b = e^{-\varphi} H_{p_1} f + e^{-\varphi}\gamma f$$

et on va montrer que $Re(Op(a)\, Op(e^{\psi})u\ ,\ Op(e^{\psi})u)$ reste borné quand on fait varier a, ce qui prouvera le résultat cherché d'après la proposition 1. 2.

On sait, d'après les hypothèses faites, que

$$Re(Op(e^{\psi-\varphi})\, P u,\ 2i\pi(F + F^*)\, Op(e^{\psi})u)$$

reste borné (On a posé $F = Op(f)$).

Il en est de même après une commutation facile de

$$Re(Pu\ ,\ 2i\pi\, (F + F^*)\, Op(e^{2\psi-\varphi})u)$$

que l'on réécrit :

$$Re(2i\pi[P,F]u,\ Op(e^{2\psi-\varphi})u) + Re(Pu,\ 2i\pi F\, Op(e^{2\psi-\varphi})u) - Re(P^*\, Op(e^{2\psi-\varphi})u,\ 2i\pi\, Fu)$$

A l'addition près de termes dont on voit facilement qu'ils sont bornés, cette expression peut s'écrire :

$$Re(2i\pi[P,F]u,\ Op(e^{2\psi-\varphi})u) + Re((Op(e^{2\psi-\varphi})\, P - P^*\, Op(e^{2\psi-\varphi}))u,\ 2i\pi\, Fu)$$

ou encore

$$Re(Op(e^{-\varphi} H_{p_1} f)\, Op(e^{\psi})u,\ Op(e^{\psi})u) + Re(Op(e^{-\varphi}\gamma f)\, Op(e^{\psi})u,\ Op(e^{\psi})u)$$

ou enfin

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Op}(a)\ \mathrm{Op}(e^{\psi})u,\ \mathrm{Op}(e^{\psi})u) + \mathrm{Re}(\mathrm{Op}(b)\ \mathrm{Op}(e^{\psi})u,\ \mathrm{Op}(e^{\psi})u)$$

Comme on sait, d'après la proposition 1. 2 que le deuxième terme est borné, le premier l'est aussi, d'où le résultat.

Démonstration du lemme 2. 1 :

On appelle H le champ de vecteurs $e^{-\varphi} H_{p_1}$ et on introduit les champs de vecteurs H_u ($u \in \mathbb{R}$) définis par

$$H_u(g) = H(g \circ \Phi^{-u}) \circ \Phi^u$$

et on a
$$H_u = \tilde{H} + \sum_{j=1}^{2n} (f_j \circ \Phi_u)\, X_j$$

Notons Γ_u^t le flot de H_u et $\tilde{\Gamma}^t$ celui de $\tilde{H}$. On choisit sur la bicaractéristique portant I une origine (x^o, ξ^o) appartenant à V de telle façon que $(x^1, \xi^1) = \tilde{\Gamma}^{t_1}(x^o, \xi^o)$ et $(x^2, \xi^2) = \tilde{\Gamma}^{t_2}(x^o, \xi^o)$ avec $0 < t_1 < t_2$.

On choisit un nombre réel ε $(0 < \varepsilon < t_1)$ tel que $\tilde{\Gamma}^t(x^o, \xi^o)$ soit défini pour $0 \le t \le t_2 + \varepsilon$.

Si $\mathcal{E}$ et $\tilde{H}$ sont colinéaires en (x^o, ξ^o), la bicaractéristique considérée est contenue dans la courbe intégrale de $\mathcal{E}$ issue de ce point et le théorème est vrai bien que sans intérêt, puisque l'ensemble des points (x, ξ) où $\mathrm{Op}(e^{\psi})u$ est $H^s_{\mathcal{E}}$ est $\mathcal{E}$-conique. Sinon on construit, dans une hypersurface $\mathcal{E}$-conique transverse à $\tilde{H}$ en (x^o, ξ^o), un voisinage σ de ce point, $\mathcal{E}$-semi conique. Puis on résout l'équation :

$$H_u(g) + ((e^{-\varphi}\gamma) \circ \Phi^u)g = a' - b' \quad (1)$$

le long des courbes intégrales de H_u, avec valeurs initiales dans σ.

Pour cela, on remarque que les conditions vérifiées par les f_j assurent que H_u tend vers $\tilde{H}$ quand u tend vers $+\infty$; on pourra donc, si u est assez grand, définir $\Gamma_u^t(x, \xi)$ pour $(x, \xi) \in \sigma$ et $t \in [0,\ t_2 + \varepsilon]$; de plus H_u sera transverse à σ en tout point.

On pose $\quad q \circ \Gamma_u^t(x, \xi) = \exp \int_0^t (e^{-\varphi}\gamma \circ \Phi^u) \circ \Gamma_u^\tau(x, \xi)\, d\tau \quad$ pour $(x, \xi) \in \sigma$, et l'équation (1) équivaut à

$$\frac{d}{dt}(q^{-1} g \circ \Gamma_u^t) = \left(\frac{a'}{q} - \frac{b'}{q}\right) \circ \Gamma_u^t \quad (2)$$

Quitte à restreindre V_1 on peut supposer que $\mathrm{supp}\ a \subset \bigcup_{t_1-\varepsilon<t<t_1+\varepsilon} \Gamma_u^t(\sigma)$.

On pose alors, pour $(x, \xi) \in \bigcup_{t_2-\varepsilon<t<t_1+\varepsilon} \Gamma_u^t(\sigma)$

$$\frac{b'(x,\xi)}{q(x,\xi)} = \frac{a' \circ \Gamma_u^{t_1-t_2}(x,\xi)}{q \circ \Gamma_u^{t_1-t_2}(x,\xi)}$$

et pour (x,ξ) appartenant à σ

$$f \circ \Gamma_u^t(x,\xi) = q \circ \Gamma_u^t(x,\xi) \int_0^t \frac{a'-b'}{q} \circ \Gamma_u^\tau(x,\xi)\, d\tau \,.$$

L'équation (2) est alors vérifiée ; de plus le support de b' est contenu dans une partie $\mathcal{E}$ semi conique à base compacte de $\bigcup\limits_{t_2-\varepsilon<t<t_2+\varepsilon} \Gamma_u^t(\sigma) = U_2$ et celui de f dans une partie $\mathcal{E}$ semi conique à base compacte de $\bigcup\limits_{0<t<t_2+\varepsilon} \Gamma_u^t(\sigma) = U$, car $\frac{a'-b'}{q}$ est d'intégrale nulle le long des courbes intégrales de H_u. On peut donc prolonger b' et f par zéro hors de ces ensembles et l'on a

$$\operatorname{supp} b' \subset U_2 \qquad \operatorname{supp} f \subset U$$

La possibilité d'inclure U et U_2 dans V et V_2 respectivement et les estimations qui montrent que f et b' restent dans une partie bornée de $S_{\mathcal{E}}^{2s}$, s'obtiennent en utilisant une nouvelle fois le fait que H_u tend vers $\tilde{H}$ quand u tend vers $+\infty$.

Une démonstration suivant ces lignes dans le cas classique a été donnée par A. UNTERBERGER ([3] section X).

Références

[1] L. HORMANDER : On the existence and regularity of solutions of linear partial differential equations. L'Enseignement Mathématique 17 (1971) p. 99-163.

[2] R. LASCAR : Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo différentielles quasi homogènes. Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI (1975).

[3] A. UNTERBERGER : Pseudo differential operators and applications : an introduction. Lecture Notes, Aarhus (1976).

T. HARDIN et A. LAVILLE
Faculté de Sciences
Département de Mathématiques
Moulin de la Housse

51062 REIMS-CEDEX B. P. 347