Journées Équations aux dérivées partielles

Ahmed Fitouhi

Fonction zêta d'Epstein pour un opérateur elliptique qui dégénère dans la direction normale

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 66-80

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____66_0>

FONCTION ZETA D'EPSTEIN POUR UN OPERATEUR

ELLIPTIQUE QUI DEGENERE DANS LA DIRECTION NORMALE

par

Ahmed FITOUHI

Faculté des Sciences de TUNIS

INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Nous supposons que son bord $\delta\Omega$ est une variété C^∞ de dimension $n-1$. Soit φ une fonction réelle, définie dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n \,,\, \varphi(x) > 0\}$$

$$d\varphi \neq 0 \quad \text{sur} \quad \delta\Omega \;.$$

Nous allons considérer sur Ω un opérateur L du second ordre, qui dégénère au bord $\delta\Omega$ dans la direction normale seulement. Des opérateurs de ce type ont été étudiés par Baouendi et Goulaouic dans leur article : Itérés d'opérateurs elliptiques et prolongement de fonctions propres (exemple 3, page 3) ([2]) .

Cet opérateur L est la restriction du laplacien-Beltrami d'une variété riemannienne M, aux fonctions de classe C^∞ sur M invariantes par un groupe d'isométries Γ.

L'opérateur L, ayant pour domaine $C^2(\bar{\Omega})$, est symétrique, essentiellement auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$, possédant pour valeurs propres $\lambda_o < \lambda_1 < \cdots < \lambda_p < \cdots$ de multiplicité finies d_p^o.

Le but de ce travail est de montrer que la fonction zeta d'Epstein associée à l'opérateur L, à savoir :

$$\mathcal{J}^{o}(s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^o}{\lambda_p^s}$$

admet un prolongement analytique méromorphe dans le plan complexe. On en déduit le comportement asymptotique de la fonction $N^o(\lambda) = \sum_{\lambda_p<\lambda} d_p^o$ donné par :

$$N^o(\lambda) \sim C\,\lambda^{\frac{n}{2}} \int_\Omega \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}} \qquad (\lambda \longrightarrow \infty) \quad .$$

Shimakura a étudié dans ([5]) quelques exemples de fonctions zeta d'Epstein pour les opérateurs dégénérés du second ordre à l'aide de calculs explicites, puis dans ([6]) en construisant la fonction de Green de l'équation de la chaleur associée.

Cet article se compose de quatre paragraphes :

1) Dans le premier paragraphe, nous exprimons l'opérateur L construit à partir du laplacien-Beltrami de la variété M d'équation $y_1^2 + y_2^2 = \varphi(x)$.

2) Au paragraphe 2, nous rappelons les principaux résultats de Minakshisundaram-Pleijel concernant le spectre d'une variété riemannienne compacte ([1]), ([7]), ([3]).

3) Au paragraphe 3, nous étudierons le spectre de l'opérateur L . Nous montrerons que la fermeture de L est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe Q_t d'opérateurs auto-adjoints positifs de $L_o^2(M)$, espace des fonctions de carré intégrables sur M , invariantes par le groupe Γ , qui s'identifie avec $L^2(\Omega)$. Soit $Z^o(t)$ la trace de l'opérateur Q_t : $Z^o(t) = \mathrm{tr}(Q_t) = \sum d_p^o\, e^{-\lambda_p t}$. Cette fonction admet une représentation intégrale faisant intervenir une moyenne portant sur la fonction de Green de l'équation de la chaleur sur M .

4) Dans le dernier paragraphe, nous étudierons la fonction zeta d'Epstein associée à L , qui est égale à :

$$\mathcal{J}^{o}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty [Z^o(t)-1]\; t^s \;\frac{dt}{t} \;.$$

Pour pouvoir montrer qu'elle admet un prolongement analytique méromorphe, nous serons amenés à l'étude des prolongements analytiques d'intégrales de type :

$$\phi(f,\alpha) = \int_0^{2\pi} \int_\Omega [\psi(x,\theta)]^\alpha f(x,\theta)\, dx\, d\theta \quad .$$

Nous préciserons enfin le comportement asymptotique de la fonction :

$$N^o(\lambda) = \sum_{\lambda_p<\lambda} d_p^o \ .$$

1. CONSTRUCTION DE L'OPERATEUR L

On considère dans $\mathbb{R}^{n+2}$ la surface M d'équation $y_1^2 + y_2^2 = \varphi(x)$. C'est une variété C^∞ , de dimension $N = n+1$. On la munit de la métrique riemannienne induite par :

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j + h(x)(dy_1^2 + dy_2^2)$$

où (g_{ij}) est une métrique riemannienne de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n$ et h est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement positive.

Le groupe $\Gamma = SO(2)$, agissant sur les variables y_1 et y_2 , opère sur M en un groupe d'isométries.

On note par $C_o^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur M invariantes par Γ . Il s'identifie de façon naturelle à $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Une fonction invariante par Γ est dite zonale.

On considère sur M les coordonnées "polaires" :

$$m = (x,\eta) \quad ; \quad x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega$$
$$y_1 = \sqrt{\varphi(x)} \quad \cos\eta$$
$$y_2 = \sqrt{\varphi(x)} \quad \sin\eta \quad .$$

L'expression de la métrique dans ces coordonnées est donnée par :

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left[g_{ij} + \frac{h}{4\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right] dx_i\, dx_j + h\varphi\, d\eta^2 \quad .$$

On note par H la matrice :

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} & g_{ij} + \frac{h}{4\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & h\varphi \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & A + \lambda B & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & h\varphi \end{array}\right)$$

avec $A = (g_{ij})$, $B = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j})$, $\lambda = \frac{h}{4\varphi}$

et soit $A^{-1} = (g^{ij})$ la matrice inverse de A .

En utilisant la réduction des formes quadratiques on montre que :

$$\det H = h\,\varphi\,(1+\lambda b) \det A$$

avec

$$b = \|\mathrm{grad}\ \varphi\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \quad .$$

On choisira la fonction h de telle sorte que $h\,\varphi\,(1 + \frac{h}{4\varphi} b) \det A = 1$ et alors la mesure riemannienne sur M est $dm = dx\, d\eta$ et sur $\delta\Omega$: $h = \dfrac{2}{\|\mathrm{grad}\ \varphi\| \sqrt{\det A}}$.

Dans la suite on considérera toujours la fonction h ainsi choisie.

PROPOSITION 1.1 - Le laplacien-Beltrami de M est donné dans les coordonnées "polaires" par :

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}) - \Lambda^* \Lambda + \frac{1}{h\varphi} \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

avec

$$\Lambda = \frac{h}{2} \sqrt{\det A} \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad .$$

La restriction du laplacien-Beltrami aux fonctions zonales est :

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] - \Lambda^* \Lambda \quad .$$

C'est un opérateur elliptique sur Ω , dégénéré sur $\delta\Omega$, de domaine $C^2(\bar{\Omega})$, symétrique par rapport à la mesure de Lebesgue dx et essentiellement auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$ de valeurs propres $\lambda_o < \lambda_1 < \ldots < \lambda_p < \ldots$.

<u>Exemples d'opérateurs L</u>

1) Soient $\Omega =]-1,1[$ et φ la fonction définie par $\varphi(x) = 1-x^2$. En prenant $g_{11} = 1$ et $h = 1$, l'opérateur L est l'opérateur de Legendre :

$$L = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} \right] = \frac{d^2}{dx^2} - \Lambda^* \Lambda$$

avec $\Lambda = x \frac{d}{dx}$.

2) Soient $\Omega = B_n$ la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = 1 - \|x\|^2 = 1 - (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2) \quad .$$

Si $(g_{ij}) = I$ (identité) , $h = 1$, l'opérateur L est $L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \Lambda^* \Lambda$.

Λ est l'opérateur d'Euler, c'est-à-dire $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

3) Plus généralement, si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction définie dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ \varphi(x) > 0\}$$

$$d\varphi \neq 0 \quad \text{sur} \quad \delta\Omega$$

et si l'on prend $(g_{ij}) = I$, l'opérateur L est donné dans ce cas par :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \Lambda^* \Lambda \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad .$$

2. DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE MINAKSHISUNDARAM-PLEIJEL

La surface M est une variété riemannienne compacte, de classe C^∞ et de dimension $N = n+1$. Soit Δ le laplacien-Beltrami de M. Les résultats suivants sont dûs à Minakshisundaram et Pleijel ([1]), ([3]), ([7]).

Résultats 1 - Δ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe d'opérateurs auto-adjoints P_t donné par :

$$P_t\, 1 = 1$$
$$P_t\, f(m) = \int_M G(t,m,m')\, f(m')\, dm'$$

avec $G(t,m,m') \geqslant 0$, de classe C^∞ sur $]0,\infty[\times M \times M$.

THEOREME 2.1 - Il existe des fonctions u_j de classe C^∞ sur $M \times M$ et pour tout entier k positif, pour tout $T > 0$, une constante $c > 0$ tels que :

$$G(t,m,m') = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^N}\, e^{-\frac{r^2(m,m')}{4t}} \left[\sum_{j=0}^{k} t^j\, u_j(m,m')\right] + R_k(t,m,m')$$

avec $\forall\, t \in [0,T]$, $\forall\, m,m' \in M$: $|R_k(t,m,m')| \leqslant c\, t^{k-\frac{N}{2}+1}$

et $r(m,m')$ est la distance géodésique de m à m'.

Résultats 2 - L'opérateur Δ, de domaine $H^2(M) = \{u \in L^2(M),\ \Delta u \in L^2(M)\}$, est auto-adjoint, de spectre discret. Les valeurs propres de $-\Delta$ sont :

$$0 = \lambda_o < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p < \cdots .$$

On note par d_p les dimensions des sous-espaces $\mathcal{H}_p$ associés aux valeurs propres λ_p.

L'opérateur P_t a une trace donnée pour $t > 0$ par :

$$Z(t) = tr(Q_t) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p\, e^{-\lambda_p t} = \int_M G(t,m,m\ )\, dm .$$

Du théorème 2.1 on déduit que pour tout k :

$$Z(t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^N} \left[\sum_{j=0}^{k} a_j \, t^j \right] + O(t^{k-\frac{N}{2}+1}) \qquad (t \to 0)$$

avec $a_j = \int_M u_j(m,m) \, dm$ et comme $u_o(m,m) = 1$, a_o est égale au volume V de M .

On associe au laplacien-Beltrami Δ de M la fonction zeta d'Epstein définie par :

$$\mathcal{J}(s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p}{\lambda_p^p} .$$

THEOREME 2.2 - La fonction zeta d'Epstein, qui est définie et holomorphe dans le domaine $\operatorname{Re} s > \frac{N}{2}$, se prolonge analytiquement dans le plan complexe en une fonction méromorphe.

Si N est impair, les pôles sont $\frac{N}{2}$, $\frac{N}{2} - 1$, ... , $\frac{N}{2} - k$, ...

Si N est pair, les pôles sont $\frac{N}{2}$, $\frac{N}{2} - 1$, ..., 2, 1 .

Pour la démonstration, il suffit de remarquer que la fonction zeta d'Epstein s'écrit : $\mathcal{J}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} [Z(t)-1] \, t^s \, \frac{dt}{t}$.

De ce théorème découle rapidement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.1 - D'après le théorème d'Ikehara la fonction $N(\lambda) = \sum_{\lambda_p < \lambda} d_p$ possède le comportement asymptotique suivant : $N(\lambda) \sim \frac{V}{(2\sqrt{\pi})^N} \frac{\lambda^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$ $(\lambda \to \infty)$.

3. SEMI-GROUPE Q_t ET SPECTRE DE L'OPERATEUR L

On note par $L_o^2(M)$ l'espace des fonctions zonales de $L^2(M)$, qui s'identifie naturellement à $L^2(\Omega,dx)$.

Si λ_p sont les valeurs propres de $-\Delta$ sur M et $\mathcal{H}_p$ les sous-espaces propres correspondants de dimension d_p , on note $\mathcal{H}_p^o$ l'espace des fonctions zonales de $\mathcal{H}_p$ et par d_p^o la dimension de $\mathcal{H}_p^o$ $(0 \leq d_p^o \leq d_p)$.
Soit Q le projecteur de $L^2(M)$ sur $L_o^2(M)$ défini par :

$$Q\, f(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma_\theta\, m)\, d\theta$$

où $\gamma_\theta \in \Gamma = SO(2)$.

<u>PROPOSITION 3.1</u> - <u>Le projecteur</u> Q <u>commute avec</u> Δ <u>et</u> P_t . <u>De plus, on a</u> :

$$L = Q\Delta = \Delta Q$$

$$Q_t = P_t Q = Q\, P_t \; .$$

On met ainsi en évidence un semi-groupe Q_t .

<u>PROPOSITION 3.2</u>

i) <u>Les opérateurs</u> Q_t <u>constituent un semi-groupe d'opérateurs auto-adjoints positifs de</u> $L_o^2(M)$ <u>dont le générateur infinitésimal est la fermeture de</u> L .

ii) <u>Le sous-espace propre</u> $\mathcal{H}_p^o$ <u>est un sous-espace propre de l'opérateur</u> Q_t <u>pour la valeur propre</u> $e^{-\lambda_p t}$.

La démonstration de cette proposition est analogue à celle qui concerne les opérateurs P_t .

On considère maintenant la fonction $Z^o(t)$ associée à l'opérateur L , qui est définie par $Z^o(t) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p^o\, e^{-\lambda_p t} = tr(Q_t)$.
Or $Q_t\, f(m) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_M G(t,\gamma_\theta\, m,m')\, f(m')\, dm'\, d\theta$.
Ceci entraîne que $Z^o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_M G(t,\gamma_\theta\, m,m)\, dm\, d\theta$.

PROPOSITION 3.3 - La fonction $Z^o(t)$ possède la représentation intégrale suivante :

$$Z^o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_\Omega \tilde{G}(t,x,\theta)\, dx\, d\theta$$

avec $\tilde{G}(t,x,\theta) = G(t,m,\gamma_\theta\, m)$.

En effet, si $m = (x,\eta) \in M$, alors $\gamma_\theta\, m = (x,\eta+\theta)$ et par raison d'invariance on a : $G(t,m,\gamma_\theta\, m) = \tilde{G}(t,x,\theta)$.

Si l'on utilise le développement de Minakshisundaram-Pleijel (Théorème 2.1), on obtient :

$$\tilde{G}(t,x,\theta) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^N}\, e^{-\frac{\psi(x,\theta)}{4t}} \left[\sum_{j=0}^{k} t^j\, u_j(x,\theta)\right] + \tilde{R}_k(t,x,\theta)$$

avec sur $[0,T]$: $|\tilde{R}_k(t,x,\theta)| \leqslant c\, t^{k-\frac{N}{2}+1}$ et où $\psi(x,\theta) = r^2(m,\gamma_\theta\, m)$.

4. PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE LA FONCTION $\mathcal{J}^o(s)$ ASSOCIEE A L

On définit pour l'opérateur L la fonction zeta d'Epstein par :

$$\mathcal{J}^o(s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^o}{\lambda_p^s} .$$

PROPOSITION 4.1 - La fonction $\mathcal{J}^o(s)$ est convergente dans le domaine $D = \{s = \sigma+i\nu \ , \ \sigma > \frac{N}{2}\}$ et elle s'écrit $\mathcal{J}^o(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty [Z^o(t)-1]\, t^s \frac{dt}{t}$.

En effet, on a $\frac{\Gamma(s)}{z^s} = \int_0^\infty e^{-zt}\, t^s \frac{dt}{t}$ et on a aussi $Z^o(t)-1 = 0(e^{-\alpha t})$, $\alpha > 0$, $t \to \infty$.

De ces deux remarques découle la proposition.

On conclut de ceci que pour montrer que la fonction $\mathcal{J}^o(s)$ se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe, il suffit de le prouver pour la fonction

$$\mathcal{J}_1^o(s) = -\frac{1}{s\Gamma(s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 Z^o(t)\, t^s \frac{dt}{t} .$$

Pour cela, on a besoin des résultats suivants.

LEMME 4.1 - Pour $z > 0$ la fonction $F(z,\alpha) = \int_0^1 e^{-\frac{z}{t}}\, t^\alpha \frac{dt}{t}$ est entière en α et si $\alpha \notin \mathbb{N}$ on a $F(z,\alpha) = z^\alpha\, \Gamma(-\alpha) - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{z^p}{p-\alpha}$.

PROPOSITION 4.2 - Il existe une fonction ψ_o strictement positive, de classe C^∞ sur $\bar{\Omega} \times [0,2\pi]$ telle que le carré de la distance géodésique de m à $\gamma_\theta\, m$ sur M soit donné par $\psi(x,\theta) = \varphi(x)\, \theta^2\, \psi_o(x,\theta)$.

En effet, il n'y a de problème qu'au voisinage des points où $\psi(x,\theta) = 0$. Soit x_o un point de $\delta\Omega$, $\varphi(x_o) = 0$. On peut supposer que $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x_o) \neq 0$ (par hypothèse $d\varphi \neq 0$ sur $\delta\Omega$) sur M, on peut prendre comme coordonnées locales au voisinage de x_o : $(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y_1,y_2)$. Si m et m' sont deux points de M , $r^2(m,m')$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \times M$. On pose :

$$m = (x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y_1,0)$$

$$m' = (x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y_1 \cos\theta ,y_1 \sin\theta) .$$

Alors $r^2(m,m')$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ des variables $x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y_1,\theta$ paire par rapport à y_1 et paire par rapport à θ .

$$r^2(m,m') = G(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y_1,\theta)$$

$$G(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},-y_1,\theta) = G(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y_1,\theta)$$

$$G(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y_1,-\theta) = G(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y_1,\theta) .$$

D'autre part $G(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},0,\theta) = 0$

$$G(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y_1,0) = 0 .$$

De plus $y_1^2 = \varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)$.

Le résultat se déduit du lemme suivant.

LEMME 4.2 - Soit f une fonction de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$, $f(x,y;z)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}^n$. Supposons

$$f(-x,y;z) = f(x,y;z)$$
$$f(x,-y;z) = f(x,y;z)$$
$$f(0,y;z) = f(x,0;z) = 0 \ .$$

Alors il existe une fonction g de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$ telle que :

$$f(x,y;z) = x^2 y^2 g(x,y;z) \ .$$

PROPOSITION 4.3 - Si $\psi(x,\theta)$ est la fonction distance géodésique $r^2(m,\gamma_\theta\, m)$, alors l'intégrale

$$\phi(f,\alpha) = \int_0^{2\pi} \int_\Omega [\psi(x,\theta)]^\alpha \, f(x,\theta)\, d\theta\, dx$$

où f est une fonction de $\mathcal{D}(\bar{\Omega} \times [0,2\pi])$ paire par rapport à θ, admet un prolongement analytique méromorphe ayant des pôles simples en $-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},-2,\dots$.
Le résidu en $\alpha = -\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2} \int_\Omega \frac{f(x,0)}{\sqrt{\varphi(x) h(x)}}\, dx$.

En effet, d'après la proposition 4.2, on a $\psi(x,\theta) = \varphi(x)\ \theta^2\ \psi_0(x,\theta)$, d'où

$$\phi(f,\alpha) = \int_0^{2\pi} \theta^{2\alpha} \left\{ \int_\Omega [\varphi(x)\ \psi_0(x,\theta)]^\alpha\, f(x,\theta)\, dx \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} \theta^{2\alpha}\, F(\alpha,\theta)\, d\theta$$ où l'on

a posé : $F(\alpha,\theta) = \int_\Omega [\varphi(x)\ \psi_0(x,\theta)]^\alpha\ f(x,\theta)\, dx$.

La fonction $F(\alpha,\theta)$ se prolonge analytiquement dans le plan complexe en une fonction méromorphe admettant des pôles simples en $-1,-2,\dots,-k,\dots$.
En effet, si l'on remarque que $\{x \ / \ \varphi(x)\ \psi_0(x,\theta) = 0\} = \delta\Omega$ et que $d_x(\varphi\ \psi_0) = \psi_0\ d\,\varphi$ sur $\delta\Omega$ on utilise alors ([4]) page 312 pour avoir le résultat.

D'autre part, la fonction $F(\alpha,\theta)$ est paire en θ . Son développement de Taylor est donné par :

$$F(\alpha,\theta) = F(\alpha,0) + \frac{\theta^2}{2!} F_\theta^{(2)}(\alpha,0) + \ldots + \frac{\theta^{2(k-1)}}{(2k-2)!} F_\theta^{(2k-2)}(\alpha,0) + \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} F_1(\alpha,\theta) \quad .$$

On a alors :

$$\int_0^{2\pi} \theta^{2\alpha} F(\alpha,\theta)\, d\theta = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{F_\theta^{(2p)}(\alpha,0)}{(2p)!} \times \frac{(2\pi)^{2\alpha+2p+1}}{2(\alpha+\frac{2p+1}{2})} + \frac{1}{(2k)!} \int_0^{2\pi} \theta^{2\alpha+2k} F_1(\alpha,\theta)\, d\theta \,.$$

Les pôles sont $-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\ldots,-\frac{2p+1}{2},\ldots$.

En groupant les résultats ci-dessus, on voit que l'intégrale $\phi(f,\alpha)$ admet un prolongement analytique méromorphe avec des pôles simples en $-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},\ldots$.

Reste à montrer que le résidu au premier pôle $\alpha = -\frac{1}{2}$ est donné par $\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}} f(x,0)dx$. Le résidu en $\alpha = -\frac{1}{2}$ est égal à :

$$\frac{1}{2} F(0,-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)\ \psi_0(x,0)}} f(x,0)\, dx \quad .$$

Il suffit de prouver que $h(x) = \psi_0(x,0)$ ce qui est vrai car pour x fixé dans Ω , la distance géodésique de m à $\gamma_\theta m$ est équivalente, lorsque θ tend vers 0 , à la longueur de l'arc de cercle paramétré par $t \longmapsto \gamma_t m$, c'est-à-dire : $\psi(x,\theta) \sim h(x)\,\varphi(x)\,\theta^2 \quad (\theta \longrightarrow 0)$.

<u>THEOREME 4.1</u> - <u>La fonction $\mathcal{J}^o(s)$ associée à l'opérateur L admet un prolongement analytique méromorphe avec des pôles simples en</u> $\frac{n}{2},\frac{n}{2}-\frac{1}{2},\frac{n}{2}-1,\ldots,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\ldots,-\frac{2k+1}{2},\ldots$ <u>Le résidu en</u> $\frac{n}{2}$ <u>est</u> :

$$\mathrm{Res}(\mathcal{J}^o,\frac{n}{2}) = \frac{1}{16(2\sqrt{\pi})^n\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}}\, dx \,.$$

Démonstration

On a : $$\mathcal{J}_1^o(s) = \frac{-1}{s\Gamma(s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 Z^o(t)\, t^s \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{-1}{s\Gamma(s)} + \frac{1}{2\pi\Gamma(s)} \int_0^{2\pi} \int_\Omega \int_0^1 \tilde{G}(t,x,\theta)\, t^s \frac{dt}{t}\, dx\, d\theta$$

pour $x \in \Omega$, $\theta \neq 0$ la fonction $\psi(x,\theta) > 0$ et par suite

$$\int_0^1 \tilde{G}(t,x,\theta)\, t^s \frac{dt}{t} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N} \sum_{j=0}^{k} \tilde{u}_j(x,\theta)\, F\left(\frac{\psi(x,\theta)}{4}, s-\frac{N}{2}+j\right) + \int_0^1 \tilde{R}_k(t,x,\theta)\, t^s \frac{dt}{t}$$

d'où

$$\mathcal{J}_1^o(s) = \frac{-1}{s\Gamma(s)} + \frac{1}{2\pi\Gamma(s)} \sum_{j=0}^{k} \int_0^{2\pi} \int_\Omega F\left(\frac{\psi(x,\theta)}{4}, s-\frac{N}{2}+j\right) \tilde{u}_j(x,\theta)\, dx\, d\theta$$
$$+ \frac{1}{2\pi\Gamma(s)} \int_0^{2\pi} \int_\Omega \int_0^1 \tilde{R}_k(t,x,\theta)\, t^s \frac{dt}{t}\, dx\, d\theta \quad .$$

On est amené à considérer des intégrales de type :

$$I(\tilde{u},\alpha) = \int_0^{2\pi} \int_\Omega F\left(\frac{\psi(x,\theta)}{4}, \alpha\right) \tilde{u}(x,\theta)\, dx\, d\theta \quad .$$

En vertu du lemme 4.1, on a :

$$I(\tilde{u},\alpha) = \Gamma(-\alpha) \int_0^{2\pi} \int_\Omega \left[\frac{\psi(x,\theta)}{4}\right]^\alpha \tilde{u}(x,\theta)\, dx\, d\theta$$
$$- \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{p-\alpha} \int_0^{2\pi} \int_\Omega \left[\frac{\psi(x,\theta)}{4}\right]^p \tilde{u}(x,\theta)\, dx\, d\theta$$

qui s'écrit encore :

$$I(\tilde{u},\alpha) = \Gamma(-\alpha)\, \phi(u,\alpha) - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{p-\alpha}\, \phi(\tilde{u},p) \quad .$$

Comme les fonctions $\tilde{u}_j(x,\theta)$ sont paires en θ , la proposition 4.3 nous conduit à dire que l'intégrale $I(\tilde{u},\alpha)$ $(\tilde{u} = \tilde{u}_j)$ admet un prolongement analytique méromorphe avec des pôles en $-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},\ldots$.

Le résidu en $\alpha = -\frac{1}{2}$ est $\frac{\sqrt{\pi}}{2^2}\int_\Omega \frac{\tilde{u}(x,0)}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}}\,dx$.

On exprime maintenant $\mathcal{J}_1^o(s)$ en fonction des intégrales $I(\tilde{u}_j,\alpha)$.

$$\mathcal{J}_1^o(s) = \frac{-1}{s\Gamma(s)} + \frac{1}{2\pi\Gamma(s)}\,\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N}\sum_{j=0}^{k} I(\tilde{u},s-\tfrac{N}{2}+j)$$

$$+ \frac{1}{2\pi\Gamma(s)}\int_0^{2\pi}\int_\Omega\int_0^1 \tilde{R}(t,x,\theta)\,t^s\,\frac{dt}{t}\,dx\,d\theta\ .$$

La fonction $\int_0^{2\pi}\int_\Omega\int_0^1 \tilde{R}(t,x,\theta)\,t^s\,\frac{dt}{t}\,dx\,d\theta$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}\ s > +\frac{N}{2} - k - 1$

car $\int_\Omega\int_0^1 |\tilde{R}_k(t,x,\theta)|\,dx\,d\theta \leqslant c\ t^{k-\frac{N}{2}+1}$.

Le résultat du théorème se déduit des prolongements analytiques des intégrales $I(\tilde{u}_j,s-\frac{N}{2}+j)$. Le premier pôle est obtenu en prenant $j = 0$, $s-\frac{N}{2} = -\frac{1}{2}$. Or $N = n+1$, donc $s = \frac{n}{2}$.

Il a pour résidu $\frac{1}{16(2\sqrt{\pi})^n\,\Gamma(\frac{n}{2})}\int_\Omega \frac{\tilde{u}_o(x,0)}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}}\,dx$ et comme $u_o(m,m) = 1$, on a $\tilde{u}_o(x,0) = 1$ et par suite $\mathrm{Res}(\mathcal{J}^o,\frac{n}{2}) = \frac{1}{16(2\sqrt{\pi})^n\,\Gamma(\frac{n}{2})}\int_\Omega \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}}$.

Remarque - On peut montrer que le résidu du deuxième pôle $\frac{n-1}{2}$ s'exprime à l'aide d'une intégrale sur le bord $\delta\Omega$.

COROLLAIRE 4.1 - La fonction $N^o(\lambda) = \sum_{\lambda_p<\lambda} d_p^o$ possède le comportement asymptotique

$$N^o(\lambda) \sim \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{16(2\sqrt{\pi})^n\,\Gamma(\frac{n}{2})}\int_\Omega \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}} \qquad (\lambda\to\infty)\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

(1) J. FARAUT . Spectre d'une variété riemannienne compacte .
Séminaire de théorie spectrale 1972-1973 .
Université Louis Pasteur 7 rue Descartes 67084 Strasbourg .

(2) BAOUENDI- GOULAOUIC . Itérés d'opérateurs elliptiques et prolongement de fonctions propres .

(3) MINAKSHISUNDARAM and PLEIJEL . Some propertie of the eigenfunctions of the laplace operator on riemannian manifolds .
Canad. J. Math. 1 (1949) pp 242-256 .

(4) GUELFAND-CHILOV . Les distributions .
Dunod 1962 .

(5) SHIMAKURA . Quelques exemples de ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre .
Proc. Jap. Acad. Vol 45 n° 10 (1969) 866-871 .

(6) SHIMAKURA . Sur les ζ -fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés .
T ô koku Math. J. 26 (1974) 95-131 .

(7) BERGER-GOUDUCHON-MAZET . Le spectre d'une variété riemannienne .
Lecture Notes Springer 194 (1971) .