

AHMED FITOUHI

Fonction zêta d'Epstein pour un opérateur elliptique qui dégénère dans la direction normale

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 66-80

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977___66_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTION ZETA D'EPSTEIN POUR UN OPERATEUR
ELLIPTIQUE QUI DEGENERE DANS LA DIRECTION NORMALE

par

Ahmed FITOUHI

Faculté des Sciences de TUNIS

INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Nous supposons que son bord $\delta\Omega$ est une variété C^∞ de dimension $n-1$. Soit φ une fonction réelle, définie dans \mathbb{R}^n telle que :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) > 0\}$$

$$d\varphi \neq 0 \quad \text{sur } \delta\Omega .$$

Nous allons considérer sur Ω un opérateur L du second ordre, qui dégénère au bord $\delta\Omega$ dans la direction normale seulement. Des opérateurs de ce type ont été étudiés par Baouendi et Goulaouic dans leur article : Itérés d'opérateurs elliptiques et prolongement de fonctions propres (exemple 3, page 3) (2) .

Cet opérateur L est la restriction du laplacien-Beltrami d'une variété riemannienne M , aux fonctions de classe C^∞ sur M invariantes par un groupe d'isométries Γ .

L'opérateur L , ayant pour domaine $C^2(\bar{\Omega})$, est symétrique, essentiellement auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$, possédant pour valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p < \dots$ de multiplicité finies d_p^0 .

Le but de ce travail est de montrer que la fonction zeta d'Epstein associée à l'opérateur L , à savoir :

$$\mathcal{J}^0(s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^0}{\lambda_p^s}$$

admet un prolongement analytique méromorphe dans le plan complexe. On en déduit le comportement asymptotique de la fonction $N^0(\lambda) = \sum_{\lambda_p < \lambda} d_p^0$ donné par :

$$N^0(\lambda) \sim C \lambda^{\frac{n}{2}} \int_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}} \quad (\lambda \rightarrow \infty) .$$

Shimakura a étudié dans (5) quelques exemples de fonctions zeta d'Epstein pour les opérateurs dégénérés du second ordre à l'aide de calculs explicites, puis dans (6) en construisant la fonction de Green de l'équation de la chaleur associée.

Cet article se compose de quatre paragraphes :

- 1) Dans le premier paragraphe, nous exprimons l'opérateur L construit à partir du laplacien-Beltrami de la variété M d'équation $y_1^2 + y_2^2 = \varphi(x)$.
- 2) Au paragraphe 2, nous rappelons les principaux résultats de Minakshisundaram-Pleijel concernant le spectre d'une variété riemannienne compacte (1), (7), (3).
- 3) Au paragraphe 3, nous étudierons le spectre de l'opérateur L . Nous montrerons que la fermeture de L est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe Q_t d'opérateurs auto-adjoints positifs de $L^2_0(M)$, espace des fonctions de carré intégrables sur M , invariantes par le groupe Γ , qui s'identifie avec $L^2(\Omega)$. Soit $Z^0(t)$ la trace de l'opérateur Q_t : $Z^0(t) = \text{tr}(Q_t) = \sum_p d_p^0 e^{-\lambda_p t}$. Cette fonction admet une représentation intégrale faisant intervenir une moyenne portant sur la fonction de Green de l'équation de la chaleur sur M .
- 4) Dans le dernier paragraphe, nous étudierons la fonction zeta d'Epstein associée à L , qui est égale à :

$$\mathcal{J}^0(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} [Z^0(t)-1] t^s \frac{dt}{t} .$$

Pour pouvoir montrer qu'elle admet un prolongement analytique méromorphe, nous serons amenés à l'étude des prolongements analytiques d'intégrales de type :

$$\phi(f, \alpha) = \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} [\psi(x, \theta)]^{\alpha} f(x, \theta) dx d\theta .$$

Nous précisons enfin le comportement asymptotique de la fonction :

$$N^0(\lambda) = \sum_{\lambda_p < \lambda} d_p^0 .$$

1. CONSTRUCTION DE L'OPERATEUR L

On considère dans \mathbb{R}^{n+2} la surface M d'équation $y_1^2 + y_2^2 = \varphi(x)$. C'est une variété C^∞ , de dimension $N = n+1$. On la munit de la métrique riemannienne induite par :

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i dx_j + h(x) (dy_1^2 + dy_2^2)$$

où (g_{ij}) est une métrique riemannienne de classe C^∞ dans \mathbb{R}^n et h est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , strictement positive.

Le groupe $\Gamma = SO(2)$, agissant sur les variables y_1 et y_2 , opère sur M en un groupe d'isométries.

On note par $C_0^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur M invariantes par Γ . Il s'identifie de façon naturelle à $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Une fonction invariante par Γ est dite zonale.

On considère sur M les coordonnées "polaires" :

$$\begin{aligned} m &= (x, \eta) \quad ; \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \\ y_1 &= \sqrt{\varphi(x)} \cos \eta \\ y_2 &= \sqrt{\varphi(x)} \sin \eta . \end{aligned}$$

L'expression de la métrique dans ces coordonnées est donnée par :

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n \left[g_{ij} + \frac{h}{4\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j + h\varphi d\eta^2 .$$

On note par H la matrice :

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} g_{ij} + \frac{h}{4\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} & & & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & h\varphi \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} A + \lambda B & & & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & h\varphi \end{array} \right)$$

avec $A = (g_{ij})$, $B = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \right)$, $\lambda = \frac{h}{4\varphi}$

et soit $A^{-1} = (g^{ij})$ la matrice inverse de A .

En utilisant la réduction des formes quadratiques on montre que :

$$\det H = h\varphi (1+\lambda b) \det A$$

avec

$$b = \|\text{grad } \varphi\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} .$$

On choisira la fonction h de telle sorte que $h\varphi (1 + \frac{h}{4\varphi} b) \det A = 1$ et alors la mesure riemannienne sur M est $dm = dx d\eta$ et sur $\delta\Omega$: $h = \frac{2}{\|\text{grad } \varphi\| \sqrt{\det A}}$.

Dans la suite on considérera toujours la fonction h ainsi choisie.

PROPOSITION 1.1 - Le laplacien-Beltrami de M est donné dans les coordonnées

"polaires" par :

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \Lambda^* \Lambda + \frac{1}{h\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

avec

$$\Lambda = \frac{h}{2} \sqrt{\det A} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

La restriction du laplacien-Beltrami aux fonctions zonales est :

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] - \Lambda^* \Lambda .$$

C'est un opérateur elliptique sur Ω , dégénéré sur $\delta\Omega$, de domaine $C^2(\bar{\Omega})$, symétrique par rapport à la mesure de Lebesgue dx et essentiellement auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$ de valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p < \dots$.

Exemples d'opérateurs L

- 1) Soient $\Omega =]-1,1[$ et φ la fonction définie par $\varphi(x) = 1-x^2$. En prenant $g_{11} = 1$ et $h = 1$, l'opérateur L est l'opérateur de Legendre :

$$L = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} \right] = \frac{d^2}{dx^2} - \Lambda^* \Lambda$$

avec $\Lambda = x \frac{d}{dx}$.

- 2) Soient $\Omega = B_n$ la boule unité dans \mathbb{R}^n et φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = 1 - \|x\|^2 = 1 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) .$$

Si $(g_{ij}) = I$ (identité), $h = 1$, l'opérateur L est $L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \Lambda^* \Lambda$.

Λ est l'opérateur d'Euler, c'est-à-dire $\Lambda = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

- 3) Plus généralement, si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n et φ une fonction définie dans \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^∞ telle que :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) > 0\}$$

$$d\varphi \neq 0 \quad \text{sur } \delta\Omega$$

et si l'on prend $(g_{ij}) = I$, l'opérateur L est donné dans ce cas par :

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \Lambda^* \Lambda \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

2. DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE MINAKSHISUNDARAM-PLEIJEL

La surface M est une variété riemannienne compacte, de classe C^∞ et de dimension $N = n+1$. Soit Δ le laplacien-Beltrami de M . Les résultats suivants sont dûs à Minakshisundaram et Pleijel (¹), (³), (⁷).

Résultats 1 - Δ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe d'opérateurs auto-adjoints P_t donné par :

$$P_t 1 = 1$$

$$P_t f(m) = \int_M G(t, m, m') f(m') dm'$$

avec $G(t, m, m') \geq 0$, de classe C^∞ sur $]0, \infty[\times M \times M$.

THEOREME 2.1 - Il existe des fonctions u_j de classe C^∞ sur $M \times M$ et pour tout entier k positif, pour tout $T > 0$, une constante $c > 0$ tels que :

$$G(t, m, m') = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^N} e^{-\frac{r^2(m, m')}{4t}} \left[\sum_{j=0}^k t^j u_j(m, m') \right] + R_k(t, m, m')$$

avec $\forall t \in [0, T]$, $\forall m, m' \in M$: $|R_k(t, m, m')| \leq c t^{k - \frac{N}{2} + 1}$

et $r(m, m')$ est la distance géodésique de m à m' .

Résultats 2 - L'opérateur Δ , de domaine $H^2(M) = \{u \in L^2(M), \Delta u \in L^2(M)\}$, est auto-adjoint, de spectre discret. Les valeurs propres de $-\Delta$ sont :

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p < \dots$$

On note par d_p les dimensions des sous-espaces \mathcal{H}_p associés aux valeurs propres λ_p .

L'opérateur P_t a une trace donnée pour $t > 0$ par :

$$Z(t) = \text{tr}(Q_t) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p e^{-\lambda_p t} = \int_M G(t, m, m) dm$$

Du théorème 2.1 on déduit que pour tout k :

$$Z(t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^N} \left[\sum_{j=0}^k a_j t^j \right] + o(t^{k-\frac{N}{2}+1}) \quad (t \rightarrow 0)$$

avec $a_j = \int_M u_j(m,m) dm$ et comme $u_0(m,m) = 1$, a_0 est égale au volume V de M .

On associe au laplacien-Beltrami Δ de M la fonction zeta d'Epstein définie par :

$$\mathcal{J}(s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p}{\lambda_p^s} .$$

THEOREME 2.2 - La fonction zeta d'Epstein, qui est définie et holomorphe dans le domaine $\text{Re } s > \frac{N}{2}$, se prolonge analytiquement dans le plan complexe en une fonction méromorphe.

Si N est impair, les pôles sont $\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, \frac{N}{2} - k, \dots$

Si N est pair, les pôles sont $\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, 2, 1$.

Pour la démonstration, il suffit de remarquer que la fonction zeta d'Epstein s'écrit : $\mathcal{J}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} [Z(t)-1] t^s \frac{dt}{t}$.

De ce théorème découle rapidement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.1 - D'après le théorème d'Ikehara la fonction $N(\lambda) = \sum_{\lambda_p < \lambda} d_p$ possède le comportement asymptotique suivant : $N(\lambda) \sim \frac{V}{(2\sqrt{\pi})^N} \frac{\lambda^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$ ($\lambda \rightarrow \infty$).

3. SEMI-GROUPE Q_t ET SPECTRE DE L'OPERATEUR L

On note par $L^2_0(M)$ l'espace des fonctions zonales de $L^2(M)$, qui s'identifie naturellement à $L^2(\Omega, dx)$.

Si λ_p sont les valeurs propres de $-\Delta$ sur M et \mathcal{H}_p les sous-espaces propres correspondants de dimension d_p , on note \mathcal{H}_p^0 l'espace des fonctions zonales de \mathcal{H}_p et par d_p^0 la dimension de \mathcal{H}_p^0 ($0 \leq d_p^0 \leq d_p$).

Soit Q le projecteur de $L^2(M)$ sur $L_0^2(M)$ défini par :

$$Q f(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma_\theta m) d\theta$$

où $\gamma_\theta \in \Gamma = SO(2)$.

PROPOSITION 3.1 - Le projecteur Q commute avec Δ et P_t . De plus, on a :

$$L = Q\Delta = \Delta Q$$

$$Q_t = P_t Q = Q P_t .$$

On met ainsi en évidence un semi-groupe Q_t .

PROPOSITION 3.2

- i) Les opérateurs Q_t constituent un semi-groupe d'opérateurs auto-adjoints positifs de $L_0^2(M)$ dont le générateur infinitésimal est la fermeture de L .
- ii) Le sous-espace propre \mathcal{H}_p^0 est un sous-espace propre de l'opérateur Q_t pour la valeur propre $e^{-\lambda_p t}$.

La démonstration de cette proposition est analogue à celle qui concerne les opérateurs P_t .

On considère maintenant la fonction $Z^0(t)$ associée à l'opérateur L , qui est définie par $Z^0(t) = \sum_{p=0}^{\infty} d_p^0 e^{-\lambda_p t} = \text{tr}(Q_t)$.

$$\text{Or } Q_t f(m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_M G(t, \gamma_\theta m, m') f(m') dm' d\theta .$$

$$\text{Ceci entraîne que } Z^0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_M G(t, \gamma_\theta m, m) dm d\theta .$$

PROPOSITION 3.3 - La fonction $Z^0(t)$ possède la représentation intégrale suivante :

$$Z^0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} \tilde{G}(t, x, \theta) dx d\theta$$

avec $\tilde{G}(t, x, \theta) = G(t, m, \gamma_{\theta} m)$.

En effet, si $m = (x, \eta) \in M$, alors $\gamma_{\theta} m = (x, \eta + \theta)$ et par raison d'invariance on a : $G(t, m, \gamma_{\theta} m) = \tilde{G}(t, x, \theta)$.

Si l'on utilise le développement de Minakshisundaram-Pleijel (Théorème 2.1), on obtient :

$$\tilde{G}(t, x, \theta) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^N} e^{-\frac{\psi(x, \theta)}{4t}} \left[\sum_{j=0}^k t^j u_j(x, \theta) \right] + \tilde{R}_k(t, x, \theta)$$

avec sur $[0, T]$: $|\tilde{R}_k(t, x, \theta)| \leq c t^{k - \frac{N}{2} + 1}$ et où $\psi(x, \theta) = r^2(m, \gamma_{\theta} m)$.

4. PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE LA FONCTION $\mathfrak{J}^0(s)$ ASSOCIEE A L

On définit pour l'opérateur L la fonction zeta d'Epstein par :

$$\mathfrak{J}^0(s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^0}{\lambda_p^s} .$$

PROPOSITION 4.1 - La fonction $\mathfrak{J}^0(s)$ est convergente dans le domaine

$D = \{s = \sigma + iv, \sigma > \frac{N}{2}\}$ et elle s'écrit $\mathfrak{J}^0(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} [Z^0(t) - 1] t^s \frac{dt}{t}$.

En effet, on a $\frac{\Gamma(s)}{zs} = \int_0^{\infty} e^{-zt} t^s \frac{dt}{t}$ et on a aussi $Z^0(t) - 1 = O(e^{-\alpha t})$,
 $\alpha > 0$, $t \rightarrow \infty$.

De ces deux remarques découle la proposition.

On conclut de ceci que pour montrer que la fonction $\mathfrak{J}^0(s)$ se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe, il suffit de le prouver pour la fonction

$$\mathcal{J}_1^0(s) = -\frac{1}{s\Gamma(s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 z^0(t) t^s \frac{dt}{t} .$$

Pour cela, on a besoin des résultats suivants.

LEMME 4.1 - Pour $z > 0$ la fonction $F(z, \alpha) = \int_0^1 e^{-\frac{z}{t}} t^\alpha \frac{dt}{t}$ est entière en α
 et si $\alpha \notin \mathbb{N}$ on a $F(z, \alpha) = z^\alpha \Gamma(-\alpha) - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{z^p}{p-\alpha}$.

PROPOSITION 4.2 - Il existe une fonction ψ_0 strictement positive, de classe C^∞
 sur $\bar{\Omega} \times [0, 2\pi]$ telle que le carré de la distance géodésique de m à $\gamma_\theta m$ sur M
 soit donné par $\psi(x, \theta) = \varphi(x) \theta^2 \psi_0(x, \theta)$.

En effet, il n'y a de problème qu'au voisinage des points où $\psi(x, \theta) = 0$.
 Soit x_0 un point de $\delta\Omega$, $\varphi(x_0) = 0$. On peut supposer que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$ (par
 hypothèse $d\varphi \neq 0$ sur $\delta\Omega$) sur M , on peut prendre comme coordonnées locales au
 voisinage de x_0 : $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, y_2)$. Si m et m' sont deux points de
 M , $r^2(m, m')$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $M \times M$. On pose :

$$m = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, 0)$$

$$m' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1 \cos \theta, y_1 \sin \theta) .$$

Alors $r^2(m, m')$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ des variables $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, \theta$
 paire par rapport à y_1 et paire par rapport à θ .

$$r^2(m, m') = G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, \theta)$$

$$G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -y_1, \theta) = G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, \theta)$$

$$G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, -\theta) = G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, \theta) .$$

D'autre part $G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0, \theta) = 0$

$$G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, 0) = 0 .$$

De plus $y_1^2 = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$.

Le résultat se déduit du lemme suivant.

LEMME 4.2 - Soit f une fonction de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$, $f(x,y;z)$,
 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}^n$. Supposons

$$\begin{aligned} f(-x,y;z) &= f(x,y;z) \\ f(x,-y;z) &= f(x,y;z) \\ f(0,y;z) &= f(x,0;z) = 0 \end{aligned}$$

Alors il existe une fonction g de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$ telle que :

$$f(x,y;z) = x^2 y^2 g(x,y;z) .$$

PROPOSITION 4.3 - Si $\psi(x,\theta)$ est la fonction distance géodésique $r^2(m, \gamma_\theta m)$, alors
 l'intégrale

$$\phi(f,\alpha) = \int_0^{2\pi} \int_\Omega [\psi(x,\theta)]^\alpha f(x,\theta) d\theta dx$$

où f est une fonction de $\mathcal{D}(\bar{\Omega} \times [0, 2\pi])$ paire par rapport à θ , admet un prolongement analytique méromorphe ayant des pôles simples en $-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots$.

Le résidu en $\alpha = -\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2} \int_\Omega \frac{f(x,0)}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}} dx$.

En effet, d'après la proposition 4.2, on a $\psi(x,\theta) = \varphi(x) \theta^2 \psi_0(x,\theta)$, d'où

$$\phi(f,\alpha) = \int_0^{2\pi} \theta^{2\alpha} \left\{ \int_\Omega [\varphi(x) \psi_0(x,\theta)]^\alpha f(x,\theta) dx \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} \theta^{2\alpha} F(\alpha,\theta) d\theta \quad \text{où l'on}$$

$$\text{a posé : } F(\alpha,\theta) = \int_\Omega [\varphi(x) \psi_0(x,\theta)]^\alpha f(x,\theta) dx .$$

La fonction $F(\alpha,\theta)$ se prolonge analytiquement dans le plan complexe en une fonction méromorphe admettant des pôles simples en $-1, -2, \dots, -k, \dots$.

En effet, si l'on remarque que $\{x / \varphi(x) \psi_0(x,\theta) = 0\} = \delta\Omega$ et que

$d_x(\varphi \psi_0) = \psi_0 d\varphi$ sur $\delta\Omega$ on utilise alors (4) page 312 pour avoir le résultat.

D'autre part, la fonction $F(\alpha, \theta)$ est paire en θ . Son développement de Taylor est donné par :

$$F(\alpha, \theta) = F(\alpha, 0) + \frac{\theta^2}{2!} F_{\theta}^{(2)}(\alpha, 0) + \dots + \frac{\theta^{2(k-1)}}{(2k-2)!} F_{\theta}^{(2k-2)}(\alpha, 0) + \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} F_1(\alpha, \theta) \quad .$$

On a alors :

$$\int_0^{2\pi} \theta^{2\alpha} F(\alpha, \theta) d\theta = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{F_{\theta}^{(2p)}(\alpha, 0)}{(2p)!} \times \frac{(2\pi)^{2\alpha+2p+1}}{2(\alpha+\frac{2p+1}{2})} + \frac{1}{(2k)!} \int_0^{2\pi} \theta^{2\alpha+2k} F_1(\alpha, \theta) d\theta \quad .$$

Les pôles sont $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2p+1}{2}, \dots$.

En groupant les résultats ci-dessus, on voit que l'intégrale $\phi(f, \alpha)$ admet un prolongement analytique méromorphe avec des pôles simples en $\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}, \dots$.

Reste à montrer que le résidu au premier pôle $\alpha = \frac{1}{2}$ est donné par $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}} f(x, 0) dx$. Le résidu en $\alpha = \frac{1}{2}$ est égal à :

$$\frac{1}{2} F(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\varphi(x) \psi_0(x, 0)}} f(x, 0) dx \quad .$$

Il suffit de prouver que $h(x) = \psi_0(x, 0)$ ce qui est vrai car pour x fixé dans Ω , la distance géodésique de m à $\gamma_{\theta} m$ est équivalente, lorsque θ tend vers 0, à la longueur de l'arc de cercle paramétré par $t \mapsto \gamma_t m$, c'est-à-dire :
 $\psi(x, \theta) \sim h(x) \varphi(x) \theta^2 \quad (\theta \rightarrow 0)$.

THEOREME 4.1 - La fonction $\mathcal{J}^0(s)$ associée à l'opérateur L admet un prolongement analytique méromorphe avec des pôles simples en $\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \dots, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 1, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2k+1}{2}, \dots$

Le résidu en $\frac{n}{2}$ est :

$$\text{Res}(\mathcal{J}^0, \frac{n}{2}) = \frac{1}{16(2\sqrt{\pi})^n \Gamma(\frac{n}{2})} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}} dx \quad .$$

Démonstration

On a :

$$\mathfrak{J}_1^0(s) = \frac{-1}{s\Gamma(s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 z^0(t) t^s \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{-1}{s\Gamma(s)} + \frac{1}{2\pi\Gamma(s)} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} \int_0^1 \tilde{G}(t,x,\theta) t^s \frac{dt}{t} dx d\theta$$

pour $x \in \Omega$, $\theta \neq 0$ la fonction $\psi(x,\theta) > 0$ et par suite

$$\int_0^1 \tilde{G}(t,x,\theta) t^s \frac{dt}{t} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N} \sum_{j=0}^k \tilde{u}_j(x,\theta) F\left(\frac{\psi(x,\theta)}{4}, s - \frac{N}{2} + j\right) + \int_0^1 \tilde{R}_k(t,x,\theta) t^s \frac{dt}{t}$$

d'où

$$\mathfrak{J}_1^0(s) = \frac{-1}{s\Gamma(s)} + \frac{1}{2\pi\Gamma(s)} \sum_{j=0}^k \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} F\left(\frac{\psi(x,\theta)}{4}, s - \frac{N}{2} + j\right) \tilde{u}_j(x,\theta) dx d\theta$$

$$+ \frac{1}{2\pi\Gamma(s)} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} \int_0^1 \tilde{R}_k(t,x,\theta) t^s \frac{dt}{t} dx d\theta .$$

On est amené à considérer des intégrales de type :

$$I(\tilde{u}, \alpha) = \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} F\left(\frac{\psi(x,\theta)}{4}, \alpha\right) \tilde{u}(x,\theta) dx d\theta .$$

En vertu du lemme 4.1, on a :

$$I(\tilde{u}, \alpha) = \Gamma(-\alpha) \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} \left[\frac{\psi(x,\theta)}{4}\right]^{\alpha} \tilde{u}(x,\theta) dx d\theta$$

$$- \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{p-\alpha} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} \left[\frac{\psi(x,\theta)}{4}\right]^p \tilde{u}(x,\theta) dx d\theta$$

qui s'écrit encore :

$$I(\tilde{u}, \alpha) = \Gamma(-\alpha) \phi(u, \alpha) - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{p-\alpha} \phi(\tilde{u}, p) .$$

Comme les fonctions $\tilde{u}_j(x,\theta)$ sont paires en θ , la proposition 4.3 nous conduit à dire que l'intégrale $I(\tilde{u}, \alpha)$ ($\tilde{u} = \tilde{u}_j$) admet un prolongement analytique méromorphe

avec des pôles en $-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots$.

Le résidu en $\alpha = -\frac{1}{2}$ est $\frac{\sqrt{\pi}}{2^2} \int_{\Omega} \frac{\tilde{u}(x,0)}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}} dx$.

On exprime maintenant $\mathfrak{J}_1^0(s)$ en fonction des intégrales $I(\tilde{u}_j, \alpha)$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1^0(s) &= \frac{-1}{s\Gamma(s)} + \frac{1}{2\pi\Gamma(s)} \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N} \sum_{j=0}^k I(\tilde{u}_j, s - \frac{N}{2} + j) \\ &+ \frac{1}{2\pi\Gamma(s)} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} \int_0^1 \tilde{R}(t, x, \theta) t^s \frac{dt}{t} dx d\theta. \end{aligned}$$

La fonction $\int_0^{2\pi} \int_{\Omega} \int_0^1 \tilde{R}(t, x, \theta) t^s \frac{dt}{t} dx d\theta$ est holomorphe pour $\text{Re } s > +\frac{N}{2} - k - 1$

car $\int_{\Omega} \int_0^1 |\tilde{R}_k(t, x, \theta)| dx d\theta \leq c t^{k - \frac{N}{2} + 1}$.

Le résultat du théorème se déduit des prolongements analytiques des intégrales

$I(\tilde{u}_j, s - \frac{N}{2} + j)$. Le premier pôle est obtenu en prenant $j = 0$, $s - \frac{N}{2} = -\frac{1}{2}$. Or $N = n+1$, donc $s = \frac{n}{2}$.

Il a pour résidu $\frac{1}{16(2\sqrt{\pi})^n \Gamma(\frac{n}{2})} \int_{\Omega} \frac{\tilde{u}_0(x,0)}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}} dx$ et comme $u_0(m,m) = 1$, on a

$$\tilde{u}_0(x,0) = 1 \text{ et par suite } \text{Res}(\mathfrak{J}^0, \frac{n}{2}) = \frac{1}{16(2\sqrt{\pi})^n \Gamma(\frac{n}{2})} \int_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}}.$$

Remarque - On peut montrer que le résidu du deuxième pôle $\frac{n-1}{2}$ s'exprime à l'aide d'une intégrale sur le bord $\delta\Omega$.

COROLLAIRE 4.1 - La fonction $N^0(\lambda) = \sum_{\lambda_p < \lambda} d_p^0$ possède le comportement asymptotique

$$N^0(\lambda) \sim \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{16(2\sqrt{\pi})^n \Gamma(\frac{n}{2})} \int_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)h(x)}} \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

BIBLIOGRAPHIE

- (¹) J. FARAUT . Spectre d'une variété riemannienne compacte .
Séminaire de théorie spectrale 1972-1973 .
Université Louis Pasteur 7 rue Descartes 67084 Strasbourg .
- (²) BAOUENDI- GOULAOUIC . Itérés d'opérateurs elliptiques et prolongement de fonctions propres .
- (³) MINAKSHISUNDARAM and PLEIJEL . Some propertie of the eigenfunctions of the laplace operator on riemannian manifolds .
Canad. J. Math. 1 (1949) pp 242-256 .
- (⁴) GUELFAND-CHILOV . Les distributions .
Dunod 1962 .
- (⁵) SHIMAKURA . Quelques exemples de \mathfrak{J} -fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre .
Proc. Jap. Acad. Vol 45 n° 10 (1969) 866-871 .
- (⁶) SHIMAKURA . Sur les \mathfrak{J} -fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés .
T ô koku Math. J. 26 (1974) 95-131 .
- (⁷) BERGER-GOUDUCHON-MAZET . Le spectre d'une variété riemannienne .
Lecture Notes Springer 194 (1971) .