Journées Équations aux dérivées partielles

Jean-Michel Bony

Prolongement à la frontière des solutions du problème des dérivées obliques

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 47-58
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____47_0>

PROLONGEMENT A LA FRONTIERE DES SOLUTIONS DU PROBLEME DES DERIVEES OBLIQUES

par

Jean-Michel BONY

On considère, pour un opérateur elliptique du second ordre A , un problème des dérivées obliques :

$$Au = f \quad \text{dans} \quad \Omega \quad ; \quad \ell u = \phi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \ ,$$

où le champ de vecteurs associé à ℓ n'est transversal que sur une partie $\partial\Omega_{e\ell\ell}$ de la frontière, et où toutes les données sont analytiques.

Il est bien connu que u se prolonge analytiquement à travers $\partial\Omega_{e\ell\ell}$. On démontre ici qu'il existe un ouvert $\hat{\Omega}$ contenant $\Omega \cup \partial\Omega_{e\ell\ell}$, indépendant de f et ϕ , tel que u se prolonge dans l'intersection de $\hat{\Omega}$ et d'un voisinage (dépendant de f et ϕ) de $\bar{\Omega}$. Au voisinage d'un point de $\partial\Omega$ où le champ est tangent, cela donne un contrôle de la manière dont l'ouvert où se prolonge u "décolle" de Ω .

Un résultat analogue, dans le cadre C^{∞} , a été établi par Melin et Sjöstrand [6], dans le cas particulier où le champ de vecteurs satisfait à des hypothèses du type Egorov-Kondratiev. Ils construisent une parametrix à l'aide d'opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe, et décrivent alors un $\hat{\Omega}$ presque optimal de manière précise.

Nous utiliserons une méthode très différente qui généralise en quelque sorte l'étude du cas extrêmement particulier suivant. Si l'on suppose qu'il existe un opérateur différentiel du premier ordre L , prolongeant ℓ et commutant avec A , la fonction $v = Lu$ vérifie alors $Av = Lf$, $v_{|\partial\Omega} = \phi$ et se prolonge donc analytiquement au voisinage de $\partial\Omega$ d'après le théorème de Morrey-Nirenberg.

L'équation Lu = v permet alors de prolonger u le long des courbes intégrales du champ de vecteurs associé à L. On peut prendre pour $\hat{\Omega}$ la réunion des courbes intégrales coupant Ω, à condition de le considérer comme ouvert étalé au-dessus de $\mathbb{R}^n$ et d'accepter des prolongements multiformes. Sinon, on peut toujours restreindre $\hat{\Omega}$ pour obtenir des prolongements uniformes, mais il n'y a plus d'ouvert $\hat{\Omega}$ optimal.

Dans le cas général, nous construirons dans le domaine complexe un opérateur L possédant les propriétés précédentes, mais qui sera un opérateur micro-différentiel (= pseudo-différentiel au sens de [7], défini sur un ouvert de l'espace cotangent) du premier ordre. Nous montrerons encore que des fonctions $v = L_\Sigma u$ se prolongent dans un voisinage de $\bar{\Omega}$. Le prolongement de u sera alors conséquence des théorèmes de prolongement de solutions d'équations micro-différentielles dans le domaine complexe de [3].

Nous supposerons chez le lecteur une certaine familiarité avec le calcul micro-différentiel précisé dans le domaine complexe développé dans [1] et [3]. Des extensions de ce calcul permettraient d'obtenir une description géométrique très précise d'ouverts $\hat{\Omega}$ que l'on peut espérer presque optimaux (voir Remarque 5.2).

1 - ENONCE DES RESULTATS

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, intérieur de son adhérence, à frontière $\partial\Omega$ analytique. Nous noterons Ω_ε l'ensemble des points dont la distance à Ω est inférieure à ε. Nous noterons $\mathcal{A}(\Omega)$, $\mathcal{A}(\bar{\Omega})$, $\mathcal{A}(\partial\Omega)$ l'espace des fonctions analytiques réelles respectivement dans Ω, au voisinage de Ω, sur la variété analytique $\partial\Omega$.

Soit $A(x,D_x)$ un opérateur différentiel elliptique du second ordre, à coefficients réels et analytiques, défini au voisinage de Ω :

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)\, u(x).$$

Soit, d'autre part, $\ell(x',D_x)$ un opérateur frontière du premier ordre, à coefficients réels et analytiques sur $\partial\Omega$:

$$\ell u(x') = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \ell_0(x')\, u(x') \quad , \qquad x' \in \partial\Omega \ .$$

Nous noterons $\partial\Omega_{e\ell\ell}$ l'ensemble des points x' de $\partial\Omega$ où le vecteur de composantes $\ell_i(x')$ est transversal à $\partial\Omega$. On peut alors énoncer le théorème principal.

Théorème 1.- Il existe un ouvert $\hat{\Omega}$, contenant $\Omega \cup \partial\Omega_{ell}$ tel que, pour toute fonction $u \in C^1(\bar{\Omega})$ vérifiant

$$Au = f \in \mathcal{Q}(\bar{\Omega})$$

$$\ell u = \phi \in \mathcal{Q}(\partial\Omega),$$

il existe $\varepsilon > 0$ tel que u se prolonge en une fonction analytique dans $\hat{\Omega} \cap \Omega_\varepsilon$.

2 - CONSTRUCTION DE L'OPERATEUR L.

Le problème étant de nature locale à la frontière, on peut se ramener par un difféomorphisme convenable au cas où $\partial\Omega$ est défini par $x_n = 0$. Il est même possible de choisir ce difféomorphisme de telle manière que, dans les nouvelles coordonnées, les coefficients $a_{in}(x)$; $i = 1,\dots,n-1$; de A s'annulent pour $x_n = 0$. Enfin, en choisissant une solution w de $Aw = 0$, non nulle au voisinage de l'origine, et en remplaçant u par u/w, ce qui ne modifie pas le problème, on se ramène au cas où le terme d'ordre 0 de A est nul (cette dernière réduction n'a rien d'essentiel, elle simplifiera les démonstrations du § 3). On aura donc, dans tout ce qui suit

$$Au = \sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \ , \text{ avec } \ a_{in}(x',0) = 0$$

$$\ell u(x') = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i} + \ell_0(x')\, u(x')$$

$$\partial\Omega_{e\ell\ell} = \{x' \mid \ell_n(x') \neq 0\} \ .$$

Théorème 2. Il existe un opérateur micro-différentiel d'ordre 1 : $L(z',z_n,D_{z'},D_{z_n})$, défini dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$, vérifiant

$$\forall k > 0, \ \exists h > 0, \quad U \supset \{(z,\zeta)\} \mid \frac{|\zeta'|}{|\zeta_n|} < k \ \text{ et } \ z_n < h\} \quad ,$$

tel que

$$AL - LA = 0 \ .$$

$$L(z',z_n,D_z,D_{z_n}) = \ell(z',D_{z'},D_{z_n}) + z_n M(z',z_n,D_{z'},D_{z_n})$$

où M est un opérateur micro-différentiel d'ordre 1 défini dans U.

La démonstration est standard. Le symbole de L s'écrit a priori $L_1(z,\zeta) + L_0(z,\zeta) + L_{-1}(z,\zeta) + \ldots$ La commutation de L et A conduit à introduire le champ hamiltonien

$$H_A = \frac{\partial A}{\partial \zeta_i}\frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial A}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial \zeta_i} .$$

On doit avoir $H_A \cdot L_1 = 0$, ce qui signifie que L_1 doit être constant le long des courbes intégrales de H_A, et les équations "de transport"

$$H_A L_{-p} = \text{fonction de } L_1,L_0,\ldots,L_{-p+1} ,$$

avec les conditions initiales pour $z_n = 0$:

$$L_1(z',0,\zeta) = \Sigma\, \ell_i(z')\, \zeta_i$$

$$L_0(z',0,\zeta) = \ell_0(z')$$

$$L_{-p}(z',0,\zeta) = 0 .$$

Les courbes intégrales de H_A : $z(t)$, $\zeta(t)$ vérifient

$$\frac{dz_n}{dt} = 2\,(a_{nn}(z(t))\,\zeta_n(t) + \sum_{i\neq n} a_{ni}(z(t))\,\zeta_i(t)) .$$

Les termes a_{ni} sont nuls pour $z_n = 0$, alors que a_{nn} ne l'est pas. On a donc $\frac{dz_n}{dt} \neq 0$ pour $\frac{|\zeta_i(t)|}{|\zeta_n(t)|} < k$ dès que $|z_n|$ est assez petit. Il en résulte aisément que les équations de transport peuvent être résolues dans un ouvert U du type décrit au théorème 1. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les estimations portant sur les L_{-p} assurant que L est bien le symbole d'un opérateur micro-différentiel.

Enfin, comme tout opérateur micro-différentiel s'écrit de façon unique sous la forme $L = z_n P(z',z_n,D'_{z'},D_{z_n}) + Q(z',D_{z'},D_{z_n})$, (voir [7] ch. 2, Th. 226), les conditions aux limites imposées montrent que $Q = \ell(z',D_{z'},D_{z_n})$, ce qui achève la démonstration du théorème.

3 - PROLONGEMENT DANS LE DOMAINE COMPLEXE DES SOLUTIONS DE $Au = f$

Proposition 3.1.- Soit u définie dans Ω vérifiant $Au = f \in \mathcal{A}(\bar{\Omega})$. Alors u se prolonge en une fonction holomorphe dans le domaine $\{z=x+iy \mid 0<x_n<\varepsilon ; |y| <C\, x_n\}$, où ε dépend de A et f, et où C ne dépend que de A.

L'opérateur A étant elliptique, les directions purement imaginaires sont non caractéristiques en tout point x réel. Il en résulte qu'il existe une constante C telle que les directions $\xi+i\eta$, avec $|\xi| \leqslant C|\eta|$, sont non caractéristiques en tout point $z = x+iy$ avec y assez petit. D'après le théorème de prolongement ([2], th. 2.1), si u est une solution de $Au = f$ définie pour $|x - x_0| < r$ (et donc admettant un prolongement holomorphe dans un certain voisinage complexe), u se prolonge holomorphiquement dans le domaine défini par $|y| < C(r-|x-x_0|)$ pourvu que f se prolonge elle-même dans ce domaine. La proposition 3.1 en découle immédiatement.

Remarque 3.2.- Nous avons besoin d'un résultat plus précis, utilisant l'hypothèse $u \in C^1(\bar{\Omega})$ pour obtenir des bornes sur le prolongement holomorphe. Cela pourrait se faire par des méthodes du type ci-dessus. Plus précisément, il faudrait reprendre les arguments de [2] § 6, en contrôlant la croissance des fonctions holomorphes à chaque utilisation du théorème de Cauchy-Kowalewski et du théorème du "Edge of the Wedge" (à l'aide par exemple des méthodes de Bros-Iagolnitzer [4]). Il sera plus simple de recourir à la méthode classique des ouverts emboîtés.

Lemme 3.3.- Supposons que f et les coefficients de A soient holomorphes pour $|z| \leqslant 1$, et soit u, définie pour $|x| \leqslant 1$, solution de $Au = f$. Alors, il existe $\rho > 0$, $K > 0$ tels que u admette un prolongement holomorphe pour $|z| \geqslant \rho$, vérifiant

$$\sup_{|z|\leqslant\rho} |u(z)| \leqslant K \left(\sup_{|x|\leqslant 1} |u(x)| + \sup_{|z|\leqslant 1} |f(z)|\right).$$

De plus, on peut choisir ρ et K ne dépendant que de m et M, lorsque l'opérateur A vérifie :

$$\sup_{|z|\leqslant 1} \left(\Sigma|a_{ij}(z)| + \Sigma\, |k_i(z)|\right) \leqslant M$$

$$\Sigma\, a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geqslant m\, |\xi|^2$$

Nous laissons au lecteur le soin de reprendre point par point la démonstration du théorème 7.5.1. de [5] (qui établit le résultat dans le cas d'un seul opérateur elliptique) en vérifiant qu'à chaque étape, les constantes peuvent être choisies ne dépendant que de m et M. Par exemple, le caractère uniforme de (7.5.2) (avec la numérotation de [5] résulte d'estimations classiques sur le problème de Dirichlet, et l'estimation cruciale (7.5.9.) doit être remplacée par

$$\varepsilon^{|\alpha|} N_{j\varepsilon} (D^{\alpha}u) \leqslant B_0 \left(\sup_{|x|\leqslant 1} |u(x)| + \sup_{|z|\leqslant 1} |f(z)|\right) B^{|\alpha|}$$

avec B_0 et B ne dépendant que de m et M.

Corollaire 3.4.- Avec $\rho' = \rho/2$ et K' ne dépendant que de m et M, on a

$$\sum_j \operatorname{Sup}_{|z|\leqslant\rho'} \left|\frac{\partial u}{\partial z_j}(z)\right| \leqslant K' \left(\sum_j \sup_{|x|\leqslant 1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| + \sup_{|z|\leqslant 1} |f(z)|\right)$$

On a en effet, d'après les inégalités de Cauchy

$$\sum_j \sup_{|z|\leqslant\rho} \left|\frac{\partial u}{\partial z_j}\right| \leqslant K_1 \sup_{z\leqslant\rho} |u(z)| \leqslant K' \left(\sup_{x\leqslant 1} |u(x)| + \sup_{|z|\leqslant 1} |f(z)|\right)$$

$$\leqslant K' \left(u(0) + \sum_j \sup_{|x|\leqslant 1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right| + \sup_{|z|\leqslant 1} |f(z)|\right)$$

Il suffit d'appliquer cette inégalité à la fonction $w(x) = u(x) - u(0)$, qui vérifie encore $Aw = f$, pour obtenir le résultat.

Théorème 3.5.- Soit $u \in C^1(\bar{\Omega})$ vérifiant $Au = f \in \mathcal{A}(\bar{\Omega})$. Alors u se prolonge en une fonction holomorphe dans le domaine $D = \{z = x+iy \mid 0 < x_n < \varepsilon \ ; \ |y| < C\, x_n\}$, où ε dépend de A et f, et où C ne dépend que de A, et de plus, les dérivées premières de $u(z)$ sont uniformément bornées dans D.

Si une boule $|x-x_0| \leqslant r$ est contenue dans Ω, et est telle que f soit holomorphe dans $|z - x_0| \leqslant r$, avec $r < 1$, on peut appliquer le corollaire 3.4. à la fonction $v(x) = u(x_0 + rx)$ qui vérifie l'équation

$$\sum a_{ij} (x_0+rx) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) + r \sum b_i (x_0+rx) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = r^2 f(x_0 + rx) \quad ,$$

Lorsque x_0 et $r < 1$ varient, les opérateurs ci-dessus vérifient des estimations uniformes, et v se prolonge donc pour $|z| \leqslant \rho'$. La fonction u se prolonge donc en une fonction holomorphe définie pour $|z - x_0| \leqslant \rho' \, r$, et y vérifie la majoration

$$r \, \Sigma \sup \left|\frac{\partial u}{\partial z_i}\right| \leqslant K' \left(r \, \|u\|_{C^1} + r^2 \sup |f(z)|\right)$$

$$\Sigma \sup \left|\frac{\partial u}{\partial z_i}\right| \leqslant K' \left(\|u\|_{C^1} + \sup |f(z)|\right) \quad .$$

Le théorème s'en déduit immédiatement, avec $C = \rho'$.

4 - REGULARITE A LA FRONTIERE DE Lu

Soit $D = \{z = x+iy \;|\; 0 < x_n < \varepsilon \,,\; |y| < C\, x_n\}$ le domaine apparaissant dans le théorème 3.5. Choisissons $k > 1/C$, d'après le théorème 2, il existe $h > 0$ tel que $L(z,\zeta)$ est défini pour $\left|\frac{\zeta'}{\zeta_n}\right| < k$ et $|z_n| < h$.

Soit alors σ vérifiant $0 < \sigma < \mathrm{Min}\,(h,\varepsilon)$, et soit Σ l'hyperplan d'équation $z_n = \sigma$. Il est alors facile de construire, pour chaque point $(x',0)$ de $\partial\Omega$, un ouvert convexe Δ de $\mathbb{C}^n$, contenant $\partial\Omega$ au voisinage de $(x',0)$, et vérifiant

$$\Delta \cap \Sigma \subset D \quad ; \quad \Delta \subset \{z \;|\; z_n < h\}$$

Δ et $\Delta \cap D$ sont k-Σ-plats (au sens de [3]).

Rappelons que, dans ces conditions, si P est un opérateur micro-différentiel défini pour $|z_n| < h$ et $\left|\frac{\zeta'}{\zeta_n}\right| < k$ on peut définir un opérateur P_Σ vérifiant (voir [3] , § 2)

$$f \in \mathcal{O}(\Delta) \Longrightarrow P_\Sigma f \in \mathcal{O}(\Delta)$$

$$f \in \mathcal{O}(\Delta \cap D) \Longrightarrow P_\Sigma f \in \mathcal{O}(\Delta \cap D).$$

Rappelons de plus que, si P et Q sont des opérateurs du type ci-dessus, on a $P_\Sigma \circ Q_\Sigma = (PQ)_\Sigma + T_\Sigma$, où l'opérateur T_Σ , composé d'opérateurs micro-différentiels et d'opérateurs "de simple couche" (voir [1] , n° 2.2 et 2.3) vérifie :

$$f \in \mathcal{O}(\Delta \cap D) \Longrightarrow T_\Sigma f \in \mathcal{O}(\Delta).$$

Théorème 4.- Sous les hypothèses du théorème 1, et avec les notations précédentes, la fonction $v = L_\Sigma u$ est solution d'un problème de Dirichlet $Av \in \mathcal{A}(\bar\Omega)$; $v|_{\partial\Omega} = \phi \in \mathcal{A}(\partial\Omega)$ au voisinage de 0, et est donc analytique jusqu'au bord.

En effet, on a $u \in \mathcal{O}(D)$, et on peut écrire dans $\mathcal{O}(\Delta \cap D)$:

$$\begin{aligned} A L_\Sigma u &= (AL)_\Sigma u + T_\Sigma u \\ &= (LA)_\Sigma u + T_\Sigma u \\ &= L_\Sigma Au + T_\Sigma u + T'_\Sigma u \end{aligned}$$

Mais $L_\Sigma Au = L_\Sigma f$ appartient à $\mathcal{O}(\Delta)$, de même que $T_\Sigma u$ et $T'_\Sigma u$. On a donc bien, en restreignant au domaine réel :

$$Av \in \mathcal{A}(\bar\Omega) .$$

D'autre part, avec les notations du théorème 2, on a

$$v = L_\Sigma u = \ell u + z_n M_\sigma u \quad \text{où M est d'ordre 1}$$

$$v = \ell u + z_n (M D_{z_n}^{-1})_\Sigma D_{z_n} u + z_n T''_\Sigma u$$

La fonction $T''_\Sigma u$ appartient à $\mathcal{O}(\Delta)$, et donc $z_n T''_\Sigma u$ s'annule sur $\partial\Omega$. La fonction $D_{z_n} u$ est bornée dans $\Delta \cap D$, et d'après les estimations de [3] , prop. 2.4.3. on a, pour tout $\varepsilon > 0$

$$|(M D_{z_n}^{-1})_\Sigma D_{z_n} u \leq C^{te} (\operatorname{Re} z_n)^{-\varepsilon} \quad ,$$

Il en résulte que la fonction $z_n (M D_{z_n}^{-1})_\Sigma D_{z_n} u$, restreinte au domaine réel, tend uniformément vers 0 au bord. La fonction v restreinte au domaine réel, définie a priori dans Ω , se prolonge continûment par $\phi \in \mathcal{A}(\partial\Omega)$ au bord, et il suffit d'appliquer le théorème de Morrey-Nirenberg pour conclure.

5 - PROLONGEMENT DES SOLUTIONS A LA FRONTIERE

Il résulte de ce qui précède que $u(z)$ est définie dans un domaine $\Delta_1 = \Delta \cap D$ qui est k-Σ-plat (où Σ est l'hyperplan $z_n = \sigma$), et qui contient l'ouvert défini par $0 < x_n < \sigma$; $|y| < C x_n$. La fonction $v = L_\Sigma u$, a priori définie dans Δ_1, se prolonge en fait pour $|z_n| < \varepsilon_1$.

Les quantités σ et ε_1 dépendent de f et ϕ et nous n'avons pas cherché à les contrôler, mais elles sont uniformes sur toute la frontière. Elles ne dépendent pas du caractère transversal ou non de ℓ. Les constantes C et k ne dépendent que de l'opérateur A.

Proposition 5.1. Pour chaque $x'_0 \in \partial\Omega$, soit G l'intérieur de l'enveloppe convexe de la réunion de

$$F = \{z = x+iy \mid x_n = \gamma \ ; \ |x'-x'_0|<\alpha \ ; \ |y|<2C\gamma\}$$

et des deux points $x' = x'_0 \ ; \ x_n = \gamma \pm 2\gamma$.

Si $\ell_n(x'_0) \neq 0$, on peut choisir $\alpha>0$ et $\gamma>0$ tels que, en posant

$$A = \{(\zeta',\zeta_n) \mid |\frac{\zeta'}{\zeta_n}|<k \ \text{ et } \ \exists z \in G, \ L_1(z,\zeta) = 0 \}$$

tout hyperplan qui coupe G sans couper F ait une normale n'appartenant pas à $\bar{A}$.

Toute solution u de $L_\Gamma u = v \in \mathcal{O}(G)$ qui est définie au voisinage de F se prolonge alors à G tout entier (on a noté Γ l'hyperplan défini par $z_n = \gamma$).

La dernière partie de la proposition résulte immédiatement du théorème 2.5.4 de [3] . Il reste à construire l'ouvert G.

Pour α et γ assez petits, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$|\mathrm{Re} \ \ell_n(z)| > \delta \ \text{pour} \ z \in G \ .$$

Si $\xi+i\eta$ est la normale à un hyperplan coupant G et non F, on a

$$|\xi'|/_{|\xi_n|} \leq \gamma/\alpha \quad \text{et} \quad |\eta|/_{|\xi_n|} \leq C.$$

$$\mathrm{Re}\ L_1(z,\zeta) = \mathrm{Re}\ \ell_n(z).\xi_n + \sum_{j \neq n} \mathrm{Re}\ \ell_j(z).\xi_j - \Sigma\, \mathrm{Im}\ \ell_j(z).\eta_j + \mathrm{Re}(z_n M_1(z,\zeta))$$

En valeur absolue, le premier terme est minoré par $\delta|\xi_n|$, tandis que chacun des trois autres peut être majoré par $\frac{1}{4}\delta|\xi_n|$ pourvu que l'on ait respectivement : γ/α assez petit, γ donc Im z donc Im $\ell_j(z)$ assez petit, γ donc $|z_n|$ assez petit. Cela achève la démonstration.

Démonstration du théorème 1.-

Définissons l'ouvert $\hat{\Omega}$ par

$$\hat{\Omega} = \{(x',x_n) \mid x_n > -\gamma(x')\} ,$$

où $\gamma(x')$ est le nombre γ intervenant dans la proposition 5.1, lorsque ℓ est transversal au point x', et où $\gamma(x')$ est nul si ℓ est tangent.

Soit x'_0 un point où ℓ est transversal. Nous distinguerons deux cas, selon les relations entre σ, ε_1 et γ.

<u>1er cas :</u> $3\gamma \leqslant \sigma$ et $(3+2C)\gamma \leqslant \varepsilon_1$

L'ouvert G est k-Γ-plat, est contenu dans Δ_1 et dans $\{z \mid z_n < \varepsilon_1\}$. D'après le théorème 2.5.1. de [3], compte tenu du fait que $G \cap \Gamma \subset \Delta_1$, la fonction $L_\Sigma u - L_\Gamma u$, a priori définie dans $\Delta_1 \cap G$, se prolonge en une fonction holomorphe dans G. Comme la fonction $L_\Sigma u = v$ est également holomorphe dans G, on a $L_\Gamma u \in \mathcal{O}(G)$. D'après la proposition 5.1., on a $u \in \mathcal{O}(G)$, et u se prolonge pour $x_n > -\gamma$.

<u>2ème cas :</u> $3\gamma > \sigma$ ou $(3+2C)\gamma > \varepsilon_1$.

Soit G' l'ouvert transformé de G par l'homothétie de centre $(x'_0,0)$ et de rapport $\text{Min}\left(\frac{\sigma}{3\gamma}, \frac{\varepsilon_1}{(3+2C)\gamma}\right)$. L'argument précédent s'applique alors complètement à G', on a $u \in \mathcal{O}(G')$ et u se prolonge pour $x_n > -\text{Min}\left(\frac{\sigma}{3}, \frac{\varepsilon_1}{3+2C}\right)$.

En posant $\varepsilon = \text{Min}\left(\frac{\sigma}{3}, \frac{\varepsilon_1}{3+2C}\right)$, quantité dépendant de f et ϕ, mais pas du caractère transversal ou non de ℓ, on obtient $u \in \mathcal{Q}(\hat{\Omega} \cap \Omega_\varepsilon)$).

<u>Remarque 5.2.</u> Le principe de la méthode utilisée est que, si l'on peut déformer continûment un ouvert (l'ouvert D, défini localement par $|y| < C\, x_n$ en l'occurence) en un autre $(D \cup G)$ de telle manière que la frontière reste non caractéristique pour L, la fonction u se prolonge dans ce nouvel ouvert.

La démonstration précédente est très loin de donner une idée d'un ouvert $\hat{\Omega}$ (presque) optimal. On perd en fait beaucoup d'information en construisant des ouverts G convexes et symétriques en les variables x', alors que L est voisin d'un champ de vecteurs (très) oblique.

On pourrait obtenir des résultats nettement plus précis, et géométriquement très proches du cas particulier évoqué dans l'introduction où l'opérateur L est differentiel, en développant les considérations suivantes.

"En général", les courbes bicaractéristiques dans $\mathbb{C}^n$, pour l'opérateur L, issues des (x_0,ζ) tels que $L_1(x_0,\zeta) = 0$, décrivent deux nappes de surface (homéomorphes aux deux nappes d'un cône de révolution) Σ_1 et Σ_2 issues de x_0, emprisonnant deux volumes Γ_1 et Γ_2 d'autant plus effilés et proches du domaine réel que x_0 est voisin de $\partial\Omega$. Les bicaractéristiques dans $\mathbb{R}^n$ décrivent les deux nappes $\Sigma_j^{\mathbb{R}} = \Sigma_j \cap \mathbb{R}^n$, $j = 1,2$.

On peut alors définir $\hat{\Omega}_{\delta,\alpha}$, où δ est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même vérifiant $\lim \delta(t) = 0$ pour $t \to 0$, et où α est un nombre > 0, de la façon suivante : $x_0 \in \hat{\Omega}_{\delta,\alpha}$ si chaque demi-bicaractéristique réelle de la famille associée à $\Sigma_1^{\mathbb{R}}$ (ou $\Sigma_2^{\mathbb{R}}$) coupe $\partial\Omega$ au bout d'un temps inférieur à $\delta[\text{dist}\,(x_0,\bar{\Omega})]$ et en faisant avec $\partial\Omega$ un angle supérieur à α.

Si $x_0 \in \hat{\Omega}_{\delta,\alpha}$ est suffisamment proche de $\partial\Omega$, alors chacune des demi-bicaractéristiques (dans $\mathbb{C}^n$) de la famille associée à Σ_1 coupe l'ouvert D assez près de $\partial\Omega$. Le problème est de montrer que u se prolonge à $D \cup \Gamma_1$. Il n'est pas très difficile de construire une famille continue d'ouverts non caractéristiques joignant D à $D \cup \Gamma_1$, mais il faudrait également réécrire tout le calcul micro-différentiel précisé développé dans [3], dans le cas d'ouverts non convexes (analogues des ouverts k-Σ-plats, formules intégrales pour P_Σ : noyaux et contours d'intégration adaptés......., théorèmes de prolongement).

Il faut restreindre les ouverts $\hat{\Omega}_{\delta,\alpha}$ si l'on veut obtenir des prolongements non multiformes. Cela dit, même si l'on accepte de considérer les $\hat{\Omega}_{\delta,\alpha}$ comme des ouverts étalés au-dessus de $\mathbb{R}^n$, ces ouverts croissent lorsque δ croît et α décroît, et la méthode utilisée ne suggère pas l'existence d'un $\hat{\Omega}$ maximal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. Bony, Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques,
S.M.F. Astérisque, 34-35 (1976) 43-91.

[2] J.M. Bony et P. Schapira, Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles,
Inventiones Math. 17(1972) 95-105.

[3] J.M. Bony et P. Schapira, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles,
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26,1 (1976) 81-140.

[4] J. Bros et D. Iagolnitzer, Support essentiel et structure analytique des distributions,
Séminaire Goulaonic-Lions-Schwartz (1975), n° 18.

[5] L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, Springer (1963).

[6] A. Melin et J. Sjöstrand, A calculus for Fourier integral operators in domains with boundary and applications to the oblique derivative problem,
Preprint Université Paris-Sud, Orsay (1977).

[7] M. Sato, T. Kawai et M. Kashiwara, Hyperfunctions and pseudo-differential equations,
Lect. Notes in Math, 287 (1973), Springer 265-529.

Jean-Michel BONY
Mathématiques - Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 - Orsay