JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MOHAMED S. BAOUENDI
CHARLES GOULAOUIC

Le théorème de Nishida pour le problème de Cauchy abstrait par une méthode de point fixe

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____1_0>

LE THÉORÈME DE NISHIDA POUR LE PROBLÈME DE CAUCHY ABSTRAIT PAR UNE MÉTHODE DE POINT FIXE.

par

M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

On donne ici une nouvelle démonstration de la forme abstraite donnée par T. Nishida [5] du théorème de Cauchy - Kovalewsky nonlinéaire. La démonstration de [5] repose sur une méthode itérative utilisée précédemment par L. Nirenberg [4] pour démontrer le même résultat sous des hypothèses plus fortes. La preuve que l'on donne ici est plus simple que celle de [5] et repose sur l'existence d'un point fixe pour une contraction définie dans un sous-ensemble fermé d'un espace de Banach. Dans la définition des espaces apparait un poids qui est proche de celui utilisé par Nagumo [3] et essentiellement différent de celui utilisé dans [4] et [5].

Notons que le résultat de Nishida [5] contient celui de Ovsjannikov [6]. Des applications de tels résultats à des problèmes de Cauchy différentiels ou pseudodifférentiels peuvent être trouvées par exemple dans [5] [2] et leurs références.

La même méthode avec quelques modifications techniques permet de traiter aussi des problèmes de Cauchy caractéristiques [cf [1]].

***

1 - On rappelle d'abord le résultat de T. Nishida [5].

Soit (X_s) pour $0 < s \leq 1$ une chaîne décroissante d'espaces de Banach, c'est-à-dire pour $0 < s' < s \leq 1$,

$$X_s \subset X_{s'} \text{ et } \| \ \|_{s'} \leq \| \ \|_s .$$

Soient T, R et C des réels strictement positifs et une fonction continue $(t,u) \mapsto F(t,u)$ de $[-T,T] \times \{u \in X_s \ ; \ \|u\|_s < R\}$ dans $X_{s'}$, pour tous $0<s'<s<1$ et vérifiant : pour tous u,v dans X_s tels que $\|u\|_s \leq R$, $\|v\|_s \leq R$,

$$\sup_{|t|\leq T} \|F(t,u) - F(t,v)\|_{s'} \leq \frac{C}{s-s'} \|u-v\|_s . \tag{1}$$

On suppose aussi qu'il existe $M > 0$ tel que l'on ait pour $0<s<1$,

$$\sup_{|t|\leq T} \|F(t,0)\|_s \leq \frac{M}{1-s} . \tag{2}$$

On a alors le résultat (Nishida [5]) :

Théorème : Sous les hypothèses (1) et (2) il existe $a \in]0,T[$ et une unique fonction u qui, pour chaque $s \in]0,1[$ est continuement différentiable de $]-a(1-s), a(1-s)[$ dans X_s et vérifie

$$\sup_{|t|<a(1-s)} \|u(t)\|_s < R \quad \text{et} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = F(t,u(t)) \text{ pour } |t|<a(1-s) \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

2 - Principe de la démonstration.

On constate d'abord (en posant $u'=v$) que pour prouver l'existence de u solution de (3) (4) il suffit de trouver une fonction $v \in C(]-a(1-s),a(1-s)[,X_s)$ pour chaque $s \in]0,1[$ et satisfaisant pour $|t| < a(1-s)$,

$$\left\|\int_0^t v(\sigma) \, d\sigma\right\|_s < R \tag{5}$$

$$(6) \qquad v(t) = F(t, \int_0^t v(\sigma)\, d\sigma).$$

Pour $a>0$, on appelle E_a l'espace des fonctions u qui, pour tout $s \in]0,1[$, sont continues de $]-a(1-s), a(1-s)[$ dans X_s et vérifient

$$(7) \qquad |||u|||_a = \sup_{\substack{0<s<1 \\ |t|<a(1-s)}} \|u(t)\|_s \,(1-s) \sqrt{1-\frac{|t|}{a(1-s)}} < \infty \ ;$$

cet espace E_a est muni de la norme $|||\ |||_a$ qui en fait un espace de Banach. On montre l'existence de v solution de (5) (6) en prouvant que, pour a assez petit, l'application $v \mapsto (t \mapsto F(t, \int_0^t v(\sigma)\, d\sigma))$ est une contraction dans un sous-ensemble fermé convenable de E_a.

La preuve de l'unicité de la solution de (3) (4) se fait plus simplement, après intégration des deux membres de (4).

Ces démonstrations reposent sur 3 lemmes.

3 - Quelques lemmes.

Lemme 1 Pour tous $a>0$, $u \in E_a$, $s \in]0,1[$ et $|t| < a(1-s)$, on a

$$\|\int_0^t u(\sigma)\, d\sigma\|_s \leq 2a|||u|||_a.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\|\int_0^t u(\sigma)\, d\sigma\|_s &\leq \int_{[0,t]} \|u(\sigma)\|_s \, d\sigma \\
&\leq |||u|||_a \int_0^{|t|} \frac{1}{1-s} \sqrt{\frac{a(1-s)}{a(1-s)-\sigma}}\, d\sigma \\
&\leq a|||u|||_a \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho}} \\
&\leq 2a|||u|||_a.
\end{aligned}$$

Lemme 2 Pour tous $a>0$, $u \in E_a$, $s \in]0,1[$ et $|t| < a(1-s)$, on a :

$$\int_{[0,t]} \frac{\|u(\sigma)\|_{s(\sigma)}}{s(\sigma)-s} \, d\sigma \le \frac{8a}{1-s} |||u|||_a \sqrt{\frac{a(1-s)}{a(1-s)-|t|}}$$

avec $s(\sigma) = \frac{1}{2}(1+s-\frac{|\sigma|}{a})$.

Démonstration :

$$\int_{[0,t]} \frac{\|u(\sigma)\|_{s(\sigma)}}{s(\sigma)-s} \, d\sigma \le \int_{[0,t]} |||u|||_a \frac{\sqrt{\frac{a(1-s(\sigma))}{a(1-s(\sigma))-\sigma}}}{(1-s(\sigma))(s(\sigma)-s)} \, d\sigma$$

$$\le |||u|||_a \frac{4a^2}{a(1-s)} \int_0^{|t|/a(1-s)} \frac{d\tau}{(1-\tau)^{3/2}}$$

$$\le \frac{8a}{1-s} |||u|||_a \sqrt{\frac{a(1-s)}{a(1-s)-|t|}} \; .$$

Lemme 3 Soient $a \in]0,T[$, $s \in]0,1[$, $|t| < a(1-s)$, $u \in E_a$ avec $|||u|||_a < \frac{R}{4a}$ et $v \in E_{2a}$ avec $|||v|||_{2a} < \frac{R}{8a}$.

L'inégalité (1) implique :

$$(8) \quad \|F(t,\int_0^t u(\sigma)\, d\sigma) - F(t,\int_0^t v(\sigma)\, d\sigma)\|_s \le C\int_{[0,t]} \frac{\|u(\sigma)-v(\sigma)\|_{s(\sigma)}}{s(\sigma)-s} \, d\sigma$$

où $s(\sigma)$ est une fonction continue de σ sur $[0,t]$ vérifiant $s<s(\sigma)\le\frac{1}{2}(s+1-\frac{|\sigma|}{a})$.

Démonstration : On remarque d'abord que le membre de droite dans (8) est bien défini grâce au lemme 2.

On peut supposer $t > 0$. Soit un nombre entier $n \ge 1$; on note $t_j = \frac{jt}{n}$ pour $0 \le j \le n$ et $s_j = \inf_{t_{j-1}\le\sigma\le t_j} s(\sigma)$ pour $1 \le j \le n$.

On définit $\tilde{s}_n$ par

$$\tilde{s}_n(\sigma) = s_j \text{ pour } \sigma \in [t_{j-1},t_j[\text{ et } 1\le j\le n.$$

On a : $\tilde{s}_n(\sigma) \le s(\sigma)$ pour $0 < \sigma < t$.

On peut écrire :

$$(9)\quad \begin{aligned} &F(t,\int_0^t u(\sigma)d\sigma) - F(t,\int_0^t v(\sigma)d\sigma) \\ &= \sum_{j=1}^{n} F(t,\int_0^{t_j} u(\sigma)\, d\sigma + \int_{t_j}^{t} v(\sigma)d\sigma) - F(t,\int_0^{t_{j-1}} u(\sigma)d\sigma + \int_{t_{j-1}}^{t} v(\sigma)\, d\sigma) \end{aligned}$$

Il résulte du lemme 1 et des hypothèses faites sur $|||u|||_a$ et $|||v|||_{2a}$ que l'on a pour $j=1,\ldots,n$,

$$\|\int_0^{t_j} u(\sigma)\, d\sigma + \int_{t_j}^{t} v(\sigma)\, d\sigma\|_{s_j} < R$$

$$\|\int_0^{t_{j-1}} u(\sigma)\, d\sigma + \int_{t_{j-1}}^{t} v(\sigma)\, d\sigma\|_{s_j} < R.$$

En utilisant (1) on obtient :

$$\begin{aligned} &\|F(t, \int_0^t u(\sigma)\, d\sigma) - F(t, \int_0^t v(\sigma)\, d\sigma)\|_s \leq \\ &\leq C \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s_j - s} \|\int_{t_{j-1}}^{t_j} (u(\sigma) - v(\sigma))\, d\sigma\|_{s_j} \\ &\leq C \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\|u(\sigma)-v(\sigma)\|_{s_j}}{s_j - s}\, d\sigma \\ &\leq C \int_0^t \frac{\|u(\sigma)-v(\sigma)\|_{\tilde{s}_n(\sigma)}}{\tilde{s}_n(\sigma)-s}\, d\sigma \\ &\leq C \int_0^t \frac{\|u(\sigma)-v(\sigma)\|_{s(\sigma)}}{\tilde{s}_n(\sigma)-s}\, d\sigma \end{aligned}$$

et comme $\tilde{s}_n(\sigma)$ converge uniformément vers $s(\sigma)$, on obtient, par passage à la limite,

$$\|F(t,\int_0^t u(\sigma)\ d\sigma) - F(t,\int_0^t v(\sigma)\ d\sigma)\|_s \leq C\int_0^t \frac{\|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{s(\sigma)}}{s(\sigma)-s}\ d\sigma.$$

4 - Démonstration de l'existence d'une solution.

Soit $b \in]0,T[$; pour $u \in E_b$ et $|||u|||_b < \frac{R}{4b}$ on définit pour $s \in]0,1[$ et $|t| < b(1-s)$,

$$G(u)\ (t) = F(t,\int_0^t u(\sigma)\ d\sigma).$$

On a

$$\|G(u)(t)\|_s \leq \|G(u)(t) - F(t,0)\|_s + \|F(t,0)\|_s.$$

Il résulte alors des lemmes 2 et 3 et de (2) :

$$\|G(u)(t)\|_s \leq 8bC\ |||u|||_b \sqrt{\frac{b(1-s)}{b(1-s)-|t|}} + \frac{M}{1-s},$$

ce qui implique

(10) $$|||G(u)|||_b \leq 8bC|||u|||_b + M.$$

Soient $u \in E_a$, $v \in E_{2a}$ avec $a \in]0,\frac{T}{2}[$ et $|||u|||_a < \frac{R}{4a}$ et $|||v|||_{2a} < \frac{R}{8a}$. Il résulte de (10) que $G(u)$ et $G(v)$ sont dans E_a ; les lemmes 2 et 3 impliquent

(11) $$|||G(u) - G(v)|||_a \leq 8Ca|||u-v|||_a.$$

On suppose alors

(12) $$a < \inf(\frac{T}{2}\ ,\ \frac{R}{16\ RC+8M})$$

et on note E la fermeture dans E_a de la boule $\{u \in E_{2a}\ ;\ |||u|||_{2a} < \frac{R}{8a}\}$.

L'ensemble E est un espace métrique complet contenu dans $\{u \in E_a\ ;\ |||u|||_a \leq \frac{R}{8a}\}$.

Il résulte immédiatement de (10)(11)(12) que G envoie E dans lui-même et vérifie

$$|||G(u)-G(v)|||_a \leq \frac{1}{2}|||u-v|||_a \text{ pour } u,v \text{ dans } E.$$

Donc G a un unique point fixe dans E, qui est évidemment une solution de (5) (6).

5 - Démonstration de l'unicité.

Soient u,v vérifiant (3)(4) ; on note w = u-v et on a pour $|t|<a(1-s)$,

$$w(t) = \int_0^t (F(\sigma,u(\sigma))-F(\sigma,v(\sigma)))\, d\sigma$$

$$\|w(t)\|_s \leq \int_{[0,t]} \|F(\sigma,u(\sigma))-F(\sigma,v(\sigma))\|_s\, d\sigma$$

(13)

$$\leq C \int_{[0,t]} \frac{\|u(\sigma)-v(\sigma)\|_{s(\sigma)}}{s(\sigma)-s}\, d\sigma$$

avec $s(\sigma) = \frac{1}{2}(1+s-\frac{|\sigma|}{a})$.

Il résulte alors de (3) que $w \in E_a$ avec $|||w|||_a \leq 2R$ et le lemme 2 et (13) impliquent :

$$|||w|||_a \leq 8aC|||w|||_a,$$

ce qui implique w = 0 pourvu que l'on ait $a < \frac{1}{8C}$.

Le théorème est complètement démontré.

Remarque La même démonstration avec des modifications évidentes donne une solution holomorphe de (3) (4) si, en plus des hypothèses (1) (2) avec t complexe, F vérifie la condition :

Pour $0<s'<s<1$ et u holomorphe de $\{t \in \mathbb{C};\ |t| < T\}$ dans X_s et $\sup_{|t|<T} \|u(t)\|_s<R$, la fonction $t \mapsto F(t,u(t))$ est holomorphe à valeurs dans $X_{s'}$, pour $|t| < T$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. Baouendi and C. Goulaouic, Remarks on the abstract form of nonlinear Cauchy-Kovalewsky theorems, to appear in Comm. in P.D.E. 1977.

[2] M.S. Baouendi and C. Goulaouic, Pseudodifferential nonlinear Cauchy problems and applications. To appear.

[3] Nagumo, Uber das Aufangsproblem Partieller Differentialgleichungen, Japan J. Math. 18 (1941) 41-47.

[4] T. Nishida, A note on the Nirenberg's theorem as an abstract form of the nonlinear Cauchy-Kovalewsky theorem in a scale of Banach spaces. To appear in J. Diff. Geometry.

[5] L. Nirenberg, An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kovalewski theorem, J. Diff. Geometry 6 (1972) 4 p.561-576.

[6] L.V. Ovsjannikov, A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces Dok. Akad. Nauk. SSSR 200 (1971) 4. Sov. Math. Dokl. 12 (1971) 5 p.1497-1502.

M.S. BAOUENDI : Dept. of Mathematics, Purdùe University,
WEST LAFAYETTE (IN) 47907 (U.S.A.)

C. GOULAOUIC : Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 PALAISEAU Cedex France