

ALAIN PIRIOU

Propagation et réflexion de la propriété de transmission des distributions de Fourier

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 172-180

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977__172_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPAGATION ET REFLEXION DE LA PROPRIETE DE TRANSMISSION
DES DISTRIBUTIONS DE FOURIER

par

A. PIRIOU

§1. - INTRODUCTION

Considérons, par exemple, la solution fondamentale A du problème mixte intérieur de Cauchy-Dirichlet pour l'opérateur des ondes

$$P = D_t^2 - \sum_{j=1}^n D_{y_j}^2$$

dans le cylindre $\mathbf{R}^+ \times \Omega$, où Ω est un ouvert borné régulier strictement convexe de \mathbf{R}^n :

$$\left\{ \begin{array}{l} PA = 0 \\ A|_{t=0} = 0 \\ D_t A|_{t=0} = \delta_{y_0} \quad (y_0 \in \Omega) \\ A|_{\mathbf{R}^+ \times \partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

On sait que WFA est invariant par le flot bicaractéristique brisé (par réflexions successives sur $\mathbf{R}^+ \times \partial\Omega$) de P (cf. (1¹), (1⁰), (3), (1²)) et que, pour $t > 0$ petit, A coïncide avec la solution fondamentale directe E de P , dont les lacunes sont bien connues : en particulier, si S est le cône de lumière $\{t = |y - y_0|, t > 0\}$, on sait que, pour $t > 0$ assez petit, A est C^∞ jusqu'au bord de part et d'autre de S lorsque n est impair, et C^∞ jusqu'au bord uniquement du côté extérieur à S (en fait nulle de ce côté) lorsque n est pair. La propagation et la réflexion de telles propriétés de régularité jusqu'au bord ont été étudiées par Hirschowitz et Piriou (8). On se propose ici de généraliser les théorèmes correspondants de (8) à des cas plus généraux pour des opérateurs à caractéristiques réelles de multiplicité constante vérifiant la condition de Lévi, en utilisant les propriétés de propagation et de réflexion de la régularité établies par Chazarain ((2), (4)) pour de tels opérateurs.

L'auteur remercie J. Chazarain et A. Hirschowitz pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

§2. - RAPPEL SUR LA PROPRIÉTÉ DE TRANSMISSION (cf. (7), (8))

Soient X une variété C^∞ , T_0^*X son fibré cotangent privé de la section nulle, Λ une sous-variété lagrangienne conique de T_0^*X ; on suppose Λ symétrique, c'est-à-dire invariante par la symétrie antipodale ℓ définie par $\ell(x, \xi) = (x, -\xi)$.

On appelle $S\Lambda$ la projection de Λ sur le fibré S^*X en sphères cotangentes et $\mathbb{P}\Lambda$ sa projection sur le fibré \mathbb{P}^*X en espaces projectifs cotangents; les projections naturelles sont systématiquement notées π . Pour $m \in \mathbb{R}$, $I^m(X, \Lambda)$ désigne l'espace des distributions de Fourier dans X de degré m associées à Λ , classiques en ce sens qu'elles sont définies par des symboles admettant des développements asymptotiques en somme de composantes homogènes de degrés décalés d'entiers.

On note \mathcal{I}_Λ^m le faisceau sur $S\Lambda$ des microfonctions correspondantes.

Appelons indice sur Λ une fonction $\omega : S\Lambda \rightarrow \mathbb{R}/4\mathbb{Z}$ antisymétrique telle que :

si $\varphi(x, \theta)$ est une phase non dégénérée définissant localement Λ , alors $\omega(\lambda) + \text{sgn } \varphi''_{\theta\theta}(x, \theta)$ est localement constante (pour $\varphi'_\theta(x, \theta) = 0$, $\lambda = (x, \varphi'_x(x, \theta))$).

Pour $d \in \mathbb{R}$, posons

$$\mathcal{I}_{\Lambda, d} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}_\Lambda^{d+k} \quad \text{et } \rho = (d, \omega).$$

On définit (cf. (8), et aussi (7) avec un décalage dans la notation d) le morphisme involutif ℓ_ρ du faisceau (sur $\mathbb{P}\Lambda$) $\pi_* \mathcal{I}_{\Lambda, d}$. Il peut être caractérisé par la propriété suivante :

si une section \mathcal{A} de $\pi_* \mathcal{I}_{\Lambda, d}$ est représentée par une intégrale oscillante $\int e^{i\varphi(x, \theta)} a(x, \theta) d\theta$, où φ est une phase antisymétrique dans un cône symétrique de $X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, et où $a(x, \theta) \sim \sum_j a_j(x, \theta)$ avec $a_j(x, \theta)$ homogène de degré $\delta - j$ en θ ($\delta = d + n/4 - N/2$), alors $\ell_\rho \mathcal{A}$ est représentée par $\int e^{i\varphi(x, \theta)} b(x, \theta) d\theta$, où $b(x, \theta) \sim \sum_j b_j(x, \theta)$ et $b_j(x, -\theta) = (-1)^j e^{i\pi(\omega(\lambda) + \text{sgn } \varphi''_{\theta\theta}(x, \theta))/2} a_j(x, \theta)$.

Une section \mathcal{A} de $\pi_* \mathcal{I}_{\Lambda, d}$ est dite de ρ -transmission si $\ell_\rho \mathcal{A} = \mathcal{A}$; une distribution $A \in I^{d+k}(X, \Lambda)$ est dite de ρ -transmission si la microfonction \mathcal{A} définie par A est de ρ -transmission; cette définition est voisine de la définition des intégrales oscillantes couplées donnée par Gårding (6). Rappelons quelques propriétés de ℓ_ρ :

(1) Soit P un opérateur différentiel dans X . Alors $\mathbb{P}\ell_\rho = \ell_\rho P$.

(2) Soient Y une hypersurface (lisse) de X et γ l'opérateur de restriction à Y ; on sait que γ est un opérateur intégral de Fourier pour la relation canonique R de T_0^*X dans T_0^*Y définie par $R = \{(\mu, \lambda) \in T_0^*Y \times T_0^*X \mid \lambda \in T_0^*X|_Y, \mu = \pi\lambda\}$, où $\pi : T_0^*X|_Y \rightarrow T_0^*Y$ est la projection. Supposons vérifiées les hypothèses standard

de composition (cf. (5)) pour $R \circ \Lambda$. Alors $\gamma \ell_{\rho} = \ell_{\rho_0} \gamma$, où $\rho_0 = (d + \frac{1}{4}, \omega_0)$ et où ω_0 est l'indice sur $R \circ \Lambda = \Lambda_0$ défini par la condition : $\omega_0(\pi\lambda) = \omega(\lambda)$ lorsque $\lambda \in \Lambda|_Y$ (on suppose que $\omega(\lambda)$ ne dépend pas du relèvement λ choisi pour $\pi\lambda$).

(3) Prenons en particulier $\Lambda = N_S$, où S est une hypersurface (lisse) de X et N_S son fibré conormal privé de la section nulle. Pour des coordonnées locales de X telles que $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$, appelons ω la valeur de $\omega(\lambda)$ correspondant à $\xi_n > 0$. En posant $\delta = d + n/4 - 1/2$ on vérifie que les distributions de ρ -transmission sont les distributions qui, modulo $C^\infty(X)$, s'écrivent localement

$$f(x)Y(x_n) + g(x)D^{\mu}\delta(x_n) \text{ avec } f, g \in C^\infty \text{ et } \mu \in \mathbb{N} \text{ lorsque } \delta \in \mathbb{Z}, \omega + 2\delta = 0$$

$$f(x)x_n^{\mu} \text{ avec } f \in C^\infty, \mu - \delta \in \mathbb{Z} \text{ lorsque } \delta \notin \mathbb{Z}, \pm\omega + 2\delta = 0.$$

Il y a donc régularité C^∞ jusqu'au bord de part et d'autre de S dans le premier cas, et régularité C^∞ jusqu'au bord du côté $\pm x_n > 0$ de S dans le second cas. De telles propriétés de transmission sont par exemple vérifiées, du moins pour $t > 0$ petit, par la solution fondamentale directe d'un opérateur du type des ondes itéré à coefficients variables selon que la dimension d'espace est impaire ou paire.

§3. - PROPAGATION DE LA PROPRIETE DE TRANSMISSION

Soit P un opérateur différentiel dans X de degré M , à symbole principal réel p . On suppose que P est à caractéristiques réelles de multiplicité constante, c'est-à-dire que

$$p = \prod_{j=1}^J p_j^{r_j}$$

où les r_j sont des entiers positifs et les p_j des symboles réels de type principal tels que les variétés $p_j^{-1}(0)$ soient deux à deux disjointes. On définit le champ bicaractéristique H_p de p par $H_p = H_{p_j}$ sur $p_j^{-1}(0)$. On suppose que P vérifie la condition de Lévi (cf. (1), (2)).

THEOREME 1. - Soit Λ une sous-variété lagrangienne conique de T_0^*X contenue dans $p^{-1}(0)$. Soit au voisinage de SA une microfonction \mathcal{A} telle que $p\mathcal{A} = 0$.

Alors, pour $m \in \mathbb{R}$,

$$(4) \left| \begin{array}{l} \text{1'ensemble des } \lambda \in \Lambda \text{ tels que } \mathcal{A} \text{ soit une section de } \mathcal{I}_\Lambda^m \text{ au voisinage de} \\ \pi\lambda \text{ est invariant par } H_p. \end{array} \right.$$

On suppose de plus Λ symétrique ; soit ω un indice sur Λ . Alors, pour $d \in \mathbb{R}$,

$$(5) \left| \begin{array}{l} \text{1'ensemble des } \lambda \in \Lambda \text{ tels que } \mathcal{A} \text{ soit une section de } (d, \omega)\text{-transmission de} \\ \pi_* \mathcal{I}_{\Lambda, d} \text{ au voisinage de } \pi\lambda \text{ est invariant par } H_p. \end{array} \right.$$

Démonstration : Soient $\lambda_0 \in \Lambda$ et V_0 un germe d'hypersurface conique de Λ

transverse en λ_0 à H_p . Supposons $\lambda_0 \in p_j^{-1}(o)$. Soit au voisinage de λ_0 un symbole elliptique homogène de degré : $1 - \text{degré } p_j$; posons $q = ep_j$, et appelons ψ^S le flot de H_q . Soit $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que $\bar{\psi} : (\lambda, s) \rightarrow \psi^S(\lambda)$ soit un difféomorphisme (homogène de degré 1 en λ) de $V_0 \times I$ sur un voisinage (conique) V de λ_0 dans Λ . Soit J un sous-intervalle ouvert de I , et soit $W = \bar{\psi}(V_0 \times J) \subset V$.

(6) | LEMME. - Soit $u \in \mathcal{J}_\Lambda^m(V)$. Alors $Pu \in \mathcal{J}_\Lambda^{m+M-r_j}(V)$, et son symbole principal est de la forme $\mathcal{L}\sigma$, où σ est le symbole principal de u et \mathcal{L} un opérateur différentiel linéaire ordinaire de degré r_j le long des bicaractéristiques de p_j , indépendant de u .

Ce lemme se déduit de (1), (2) et du fait que $V \subset p_j^{-1}(o)$.

(7) | LEMME. - Soit $u \in \mathcal{J}_\Lambda^m(W)$ telle que $Pu = 0$. Alors u se prolonge d'une façon unique en $\tilde{u} \in \mathcal{J}_\Lambda^m(V)$ vérifiant $P\tilde{u} = 0$.

En effet, soit $\sigma_0 \in C^\infty(W, \Omega_{1/2} \otimes L)$ le symbole principal de u (σ_0 est homogène de degré $m + n/4$). Le lemme (6) montre que $\mathcal{L}\sigma_0 = 0$ dans W ; d'après les propriétés classiques des équations différentielles linéaires ordinaires, σ_0 se prolonge en $\tilde{\sigma}_0 \in C^\infty(V, \Omega_{1/2} \otimes L)$ homogène de degré $m + n/4$ tel que $\mathcal{L}\tilde{\sigma}_0 = 0$ dans V . Soit $\tilde{u}_0 \in \mathcal{J}_\Lambda^m(V)$ de symbole principal $\tilde{\sigma}_0$. On a $u - \tilde{u}_0 \in \mathcal{J}_\Lambda^{m-1}(W)$ et $P\tilde{u}_0 \in \mathcal{J}_\Lambda^{m-1}(V)$ où $m' = m + M - r_j$; soit σ_1 le symbole principal de $u - \tilde{u}_0$; on a $\mathcal{L}\sigma_1 = f$ dans W , où $f \in C^\infty(V, \Omega_{1/2} \otimes L)$ est le symbole principal de $-P\tilde{u}_0$; σ_1 se prolonge en $\tilde{\sigma}_1 \in C^\infty(V, \Omega_{1/2} \otimes L)$ tel que $\mathcal{L}\tilde{\sigma}_1 = f$ dans V ; on détermine ainsi de proche en proche des $u_k \in \mathcal{J}_\Lambda^{m-k}(V)$ de symbole principal $\tilde{\sigma}_k$ ($k \in \mathbb{N}$), et on prend $\tilde{u} \sim \sum_k \tilde{u}_k$. L'unicité de \tilde{u} résulte du théorème de propagation de la régularité (cf. (2)^k, th. 1.1).

Le lemme (7) et un argument de connexité impliquent (4).

Pour démontrer (5), considérons $\lambda \in \Lambda$ tel que \mathcal{A} soit une section de (d, ω) -transmission de $\pi_* \mathcal{I}_{\Lambda, d}$ au voisinage de $\pi\lambda$. D'après (4), \mathcal{A} est une section de $\pi_* \mathcal{I}_{\Lambda, d}$ dans $\pi\mathcal{V}$, où \mathcal{V} est un voisinage conique symétrique de la bicaractérisation b issue de λ . Or, d'après (1), on a $P(\ell_\rho \mathcal{A} - \mathcal{A}) = \ell_\rho P\mathcal{A} - P\mathcal{A} = 0$; puisque $\ell_\rho \mathcal{A} - \mathcal{A}$ est nulle par hypothèse au voisinage de chaque point de $\pi\lambda$, le théorème de propagation de la régularité montre que $\ell_\rho \mathcal{A} - \mathcal{A}$ est nulle au voisinage de chaque point de πb .

REMARQUE 1. - Le théorème 1 se généralise immédiatement au cas où P est pseudo-différentiel (pour (4)) et où P est pseudo-différentiel de transmission (pour (5)).

§4. - REFLEXION DE LA PROPRIETE DE TRANSMISSION

On reprend l'opérateur différentiel P considéré au début du paragraphe précédent. Soient Y une hypersurface de X et $\mu_0 = (y_0, \eta_0)$ un point de T_0^*Y . On suppose que Y est non caractérisitique pour P en y_0 , et que $p^{-1}(o) \cap \pi^{-1}\mu_0$ est non vide

($\pi : T^*X|_Y \rightarrow T^*Y$ est la projection). On pose $p^{-1}(o) \cap \pi^{-1}\mu_o = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et on suppose que $H_{p^{-1}}$ est transverse à $T^*X|_Y$ en λ_j ($j = 1, \dots, k$). Si j' est l'indice tel que $\lambda_j \in p_{j'}^{-1}(o)$, on pose $r_{j'} = s_j$.

Le théorème 2 ci-dessous est, comme le théorème 1, composé de deux parties : l'une décrit la réflexion de la propriété, pour une distribution, d'être de Fourier ; l'autre d'écrit la réflexion de la propriété de transmission. Il sera sous-entendu que toutes les variétés lagrangiennes sont coniques pour la première partie, et de plus symétriques pour la seconde.

Soit Λ_o un germe en μ_o de sous-variété lagrangienne de T_o^*Y ; on appelle C la relation bicaractéristique de P , et R la relation canonique correspondant à l'opérateur γ de restriction à Y (cf. (2)). Soit Λ_j ($j = 1, \dots, k$) le germe en λ_j de $C \circ R^{-1} \circ \Lambda_o$, et définissons la sous-variété lagrangienne Λ de T_o^*X par $\Lambda = \bigcup_{j=1}^k \Lambda_j$. Notons que $R \circ \Lambda = \Lambda_o$; si ω_o est un indice sur Λ_o , on définit l'indice ω sur Λ par $\omega(\lambda) = \omega_o(\pi\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda|_Y$.

Soient \tilde{G} un voisinage de y_o dans X , et G son intersection avec un des demi-espaces ouverts délimités par Y dans X .

Soit $A \in \mathcal{D}'(G)$ prolongeable à \tilde{G} et telle que $PA \in C^\infty(\tilde{G})$. Fixons un champ v sur X transverse à Y , et appelons $\gamma_j A = \gamma(v^j A)$ la $j^{\text{ième}}$ trace de A sur $G_o = \tilde{G} \cap Y$. On désigne par \mathcal{A} la microfonction définie par A .

THEOREME 2. - Soit $k_o \in \{0, \dots, k\}$. On suppose que $WFA \subset \Lambda|_G$.

On suppose que \mathcal{A} est une section de \mathcal{I}_Λ^m au voisinage de chaque point de $S\Lambda_j|_G$ pour $1 \leq j \leq k_o$, et que $\gamma_j A \in C^\infty(G_o)$ pour $0 \leq j \leq m_2 + m'/2 - 1$, où on a posé $m_1 = s_1 + \dots + s_{k_o}$, $m_2 = s_{k_o+1} + \dots + s_k$, $m' = M - m_1 - m_2$. Alors

$$(8) \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ est une section de } \mathcal{I}_\Lambda^{m+s_j-1} \text{ au voisinage de chaque point de } S\Lambda_j|_G \text{ pour} \\ k_o + 1 \leq j \leq k. \end{array} \right.$$

On suppose de plus $m' = 0$ et que \mathcal{A} est de (d, ω) -transmission au voisinage de chaque point de $S\Lambda_j|_G$ pour $1 \leq j \leq k_o$. Alors

$$(9) \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ est de } (d, \omega)\text{-transmission au voisinage de chaque point de } S\Lambda_j|_G \text{ pour} \\ k_o + 1 \leq j \leq k. \end{array} \right.$$

Démonstration : On peut supposer $Y = \{x = (t, y) \in \mathbb{R}^n \mid t = 0\}$, $G = \{t > 0\}$, $v = \frac{\partial}{\partial t}$. Par hypothèse, pour (t, y, η) dans un voisinage conique symétrique de (o, y_o, η_o) , on a

$$p(t, y, \tau, \eta) = \prod_{j=1}^k (\tau - v_j(t, y, \eta))^{s_j} q(t, y, \tau, \eta),$$

où q est un polynôme en τ de degré m' sans zéro réel, et où

$$(10) \quad \left| \begin{array}{l} \text{les } v_j(t, y, \eta) \text{ sont réels, deux à deux distincts, homogènes de degré } 1 \text{ en} \\ \eta. \end{array} \right.$$

Prolongeons les v_j à $\mathbb{R} \times T_0^*Y$ en conservant (10). On sait (cf. (1^o), (4)) qu'on peut factoriser P en

$$(11) \quad P = H_1 Q H_2 + R$$

où H_1, H_2, Q, R sont des opérateurs pseudo-différentiels de degrés m_1, m_2, m', m différentiels en t , H_1 ayant pour symbole principal

$$\prod_{j=1}^{k_0} (\tau - v_j(t, y, \eta))^{s_j},$$

H_2 ayant pour symbole principal

$$\prod_{j=k_0+1}^k (\tau - v_j(t, y, \eta))^{s_j},$$

H_1 et H_2 vérifiant encore la condition de Lévi, où le reste R est de la forme

$$(12) \quad \sum_{j=0}^{M-1} R_j(t, y, D_y) D_t^j,$$

le symbole complet de R_j étant d'ordre $-\infty$ dans un voisinage conique symétrique Γ de $(0, y_0, \eta_0)$ et où Q est elliptique dans $\Gamma \times \mathbb{R}$.

Posons

$$\Lambda^1 = \bigcup_{j=1}^{k_0} \Lambda_j, \quad \Lambda^2 = \bigcup_{j=k_0+1}^k \Lambda_j, \quad PA = f, \text{ et}$$

$$(13) \quad B = Q H_2 A.$$

On a donc, d'après (11), $H_1 B = f - RA$. Posons $g_j = (D_t^j B)|_{t=T}$ où $T > 0$ est choisi assez petit. Par existence et unicité de la solution du problème de Cauchy pour H_1 (avec données initiales pour $t=T$) (cf. (1)), on a $B = B' + B''$, où B' est la solution de $H_1 B' = 0$, $(D_t^j B')|_{t=T} = g_j$ ($j = 0, \dots, m_1 - 1$) et où B'' est la solution de $H_1 B'' = f - RA$, $(D_t^j B'')|_{t=T} = 0$ ($j = 0, \dots, m_1 - 1$). D'après (12) et (4) on sait que B'' est régulière en μ_0 , en ce sens que $a(y, D_y) B'' \in C^\infty$ lorsque le symbole complet de $a(y, D_y)$ est à support dans un voisinage conique assez petit de (y_0, η_0) ou de $(y_0, -\eta_0)$.

On en déduit que la microfonction \mathcal{B}'' définie par B'' est nulle dans un voisinage conique symétrique V de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, et donc que $\mathcal{B}' \in \mathcal{D}^{m+m'+m_2}(S\Lambda_{|G}^1 \cap V)$ (cf. (13)).

Puisque $H_1 B' = 0$, le théorème 1 de propagation montre qu'on peut encore décomposer B en

$$(14) \quad B = B' + B'', \text{ avec } B' \in I^{m+m'+m_2}(\tilde{G}, \Lambda), \text{ } B'' \text{ régulière en } \mu_0.$$

Posons maintenant

$$(15) \quad H_2 A = C.$$

D'après (13), (14) et l'hypothèse sur les traces de A (on appelle que degré $H_2 = m_2$) on obtient

$$\begin{cases} QC = B' + B'' \\ \gamma_j C \in C^\infty \text{ pour } 0 \leq j \leq m'/2 - 1. \end{cases}$$

Soit E une paramétrix microlocale de Q (on rappelle que Q est elliptique dans $\Gamma \times \mathbb{R}$). Posons $C - (EB')|_G = D$; alors

$$\begin{cases} QD \text{ est régulière en } \mu_0 \\ \gamma_j D \in \Gamma^{m+m_2+j+1/4}(G_0, \Lambda_0) \text{ pour } 0 \leq j \leq m'/2 - 1. \end{cases}$$

D'après la théorie (microlocale) du projecteur de Caldéron, on en déduit que la microfonction définie par $\gamma_j D$, et donc aussi la microfonction définie par $\gamma_j C$ est, pour tout $j \in \mathbb{N}$, une section de $\int_{\Lambda_0}^{m+m_2+j+1/4}$ au voisinage de $\pi\mu_0$. En calculant de proche en proche les traces de A à l'aide de l'équation (15) (on rappelle que $\gamma_j A \in C^\infty$ pour $0 \leq j \leq m_2 - 1$) on obtient alors que

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{la microfonction définie par } \gamma_j A \text{ est, pour tout } j \in \mathbb{N}, \text{ une section de} \\ \int_{\Lambda_0}^{m+j+1/4} \text{ au voisinage de } \pi\mu_0. \end{array} \right.$$

En considérant une factorisation analogue à (11) :

$$\tilde{P} = \tilde{H}\tilde{Q} + \tilde{R} \quad (\text{degré } \tilde{H} = m_1 + m_2, \text{ degré } \tilde{Q} = m')$$

et en posant

$$(17) \quad \tilde{Q}A = U$$

$$\text{il vient } \begin{cases} \tilde{H}\tilde{U} = f - \tilde{R}A \\ \gamma_j U = \tilde{g}_j' + \tilde{g}_j'' \quad (0 \leq j \leq m_1 + m_2 - 1) \end{cases}$$

où, d'après (16), $\tilde{g}_j' \in \Gamma^{m+m'+j+1/4}(G_0, \Lambda_0)$, \tilde{g}_j'' régulière en μ_0 .

On sait (cf. (1), (2)) que la solution U de ce problème de Cauchy est, modulo une distribution régulière en μ_0 , de la forme

$$\sum_{j=1}^k U_j, \text{ avec } U_j \in \Gamma^{m+m'+s_j-1}(\tilde{G}, \Lambda_j).$$

D'où (8) grâce à (17) puisque \tilde{Q} est elliptique de degré m' dans $\Gamma \times \mathbb{R}$.

Plaçons-nous enfin sous les hypothèses de (9). Puisque $m' = 0$, on peut prendre $\tilde{Q} = I$, $U = A$ dans le raisonnement précédent, qui montre alors que $A = A|_G + A''$, où A' est une section de $\pi_* \int_{\Lambda, d}$ et où A'' est régulière en μ_0 .

En posant $\rho = (d, \omega)$, on définit naturellement (modulo $C^\infty(\tilde{G})$) la distribution $\ell_\rho A'$ à partir de la microfonction $\ell_\rho A'$. On a (cf. (1), (2))

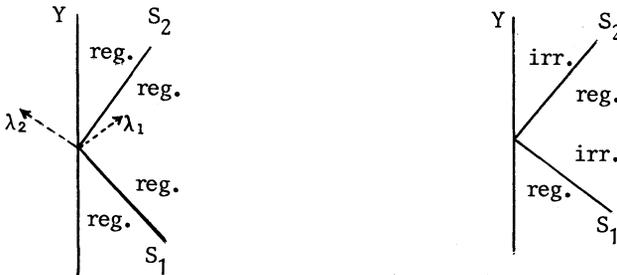
$$\begin{cases} P(\ell_\rho A' - A') \equiv \ell_\rho PA' - PA' \text{ régulière en } \mu_0 \\ \gamma_j(\ell_\rho A' - A') \equiv \ell_{\rho_0} \gamma_j A' - \gamma_j A' \text{ régulière en } \mu_0 \text{ pour } 0 \leq j \leq m_2 - 1. \end{cases}$$

Or, par hypothèse, $WF(\ell_\rho A' - A')$ ne rencontre pas $\Lambda_{|G}^1 \cap (\Gamma \times \mathbb{R})$, où Γ est un voisinage conique symétrique de $(0, y_0, \eta_0)$. Le théorème de réflexion de la régularité (cf. (4)) montre alors que $\ell_\rho A' - A'$ est régulière en μ_0 , ce qui implique (9).

REMARQUE. - On peut étendre le théorème 2 au cas des conditions au bord plus générales considérées par Majda, Osher (9) et, sous l'hypothèse des caractéristiques réelles simples, au cas des systèmes considérés par Taylor (12). La généralisation du résultat (9) concernant la réflexion de la propriété de transmission au cas $m' > 0$ n'est pas évidente puisque les opérateurs pseudo-différentiels sur Y intervenant dans le projecteur de Caldéron ne conservent pas la transmission.

EXEMPLE. - Soit S_1 un germe en $y_0 \in Y$ d'hypersurface de X tel que $NS_1 \subset p^{-1}(0)$.

On suppose H_p transverse à $T^*X|_Y$ en $\lambda_1 = (y_0, \xi_1) \in NS_1$; soit $\mu_0 = \pi\lambda_1$; on suppose $k = 2$ et H_p transverse à $T^*X|_Y$ en λ_2 . On prend $\Lambda_0 = R \circ NS_1$; on vérifie que $\Lambda_0 = NS_0$, où S_0 est une hypersurface de Y , et que $\Lambda = NS_1 \cup NS_2$ où S_2 est un germe en y_0 d'hypersurface de X . Si ω_1 est un indice sur $\Lambda_1 = NS_1$, on définit l'indice ω_0 sur NS_0 et l'indice ω_2 sur $\Lambda_2 = NS_2$ par $\omega_1(\lambda_1) = \omega_0(\mu_0) = \omega_2(\lambda_2)$; ω est alors l'indice sur Λ défini par $\omega = \omega_j$ sur Λ_j ($j = 1, 2$). Quand on applique le théorème 2 dans ce cas pour $k_0 = 1$ lorsque (d, ω) est d'un type (4) sur NS_1 , on obtient les réflexions de comportement au bord schématisées ci-dessous :



Ceci s'applique en particulier, grâce au théorème 1 de propagation, à la première réflexion dans l'exemple considéré dans l'introduction (avec $S_1 = S$).

BIBLIOGRAPHIE

- (¹) CHAZARAIN, Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier 24 (1974), p. 173-202.
- (²) CHAZARAIN, Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples et résolubilité locale, Ann. Inst. Fourier 24 (1974), p. 203-223.
- (³) CHAZARAIN, Paramétrix du problème mixte pour l'équation des ondes à l'intérieur d'un domaine convexe pour les bicaractéristiques, Soc. Math. France, Astérisque 34-35 (1976), p.165-181.
- (⁴) CHAZARAIN, Reflexion of C^∞ singularities for a class of operators with multiple characteristics, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 12 supplement (1977), p. 39-52.
- (⁵) DUJSTERMAAT, Fourier integral operators, Courant Institute of Math. Sc., New-York University, (1973).
- (⁶) GÄRDING, Sharp Front of Paired oscillatory integrals, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 12 supplement (1977), p. 53-68.
- (⁷) HIRSCHOWITZ, PIRIOU, La propriété de transmission pour les distributions de Fourier ; applications aux lacunes, Séminaire Goulaouic-Schwartz (1976-77), exposé n° 14.
- (⁸) HIRSCHOWITZ, PIRIOU, La propriété de transmission pour les distributions intégrales de Fourier, (à paraître).
- (⁹) MAJDA, OSHER, Reflection of singularities at the boundary, comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), p. 479-499.
- (¹⁰) NIRENBERG, Lectures on linear partial differential equations, Regional Conf. series in Math. n° 17, A. M. S. (1973).
- (¹¹) POUZNER, SUKHARREVSKII, Discontinuities of the Green's fonction of a mixed problem for a mixed problem for the wave equation, Mat. Sb. 51 (1960), p. 3-26, Amer. Math. Soc. Transl., ser. 2, 47 (1965), p. 131-156.
- (¹²) TAYLOR, Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), p. 457-478.

Université de Nice

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET SCIENCES PHYSIQUES

Parc Valrose - 06034 NICE CEDEX