Journées Équations aux dérivées partielles

Pierre Bolley
Jacques Camus
Bernard Helffer

Hypoellipticité pour une équation d'évolution abstraite du second ordre

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 16-32
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____16_0>

HYPOELLIPTICITE POUR UNE EQUATION D'EVOLUTION ABSTRAITE DU SECOND ORDRE

par

P. BOLLEY, J. CAMUS, B. HELFFER

Dans cet article, on étudie l'hypoellipticité de l'opérateur suivant : $P = (\partial_t + at\, A)(\partial_t + bt^k A) + cA$ où $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, A est un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert H., a,b,c sont des nombres complexes et k est un entier impair > 1 . Plus précisément, on démontre le résultat suivant :

<u>THEOREME</u> - Si $\text{Re}\, a.\text{Re}\, b < 0$ et si $\frac{c}{a} \notin \mathbb{Z}$, l'opérateur P est hypoelliptique en $t = 0$.

Cette notion d'hypellipticité est précisée plus loin ; en particulier, lorsque $H = L^2(\mathbb{R})$ et $A = -i \frac{\partial}{\partial x}$, on retrouve l'hypoellipticité classique.

Cette étude vient à la suite de plusieurs travaux faits sur des opérateurs de la forme $(\partial_t + at\, A)(\partial_t + bt\, A) + cA$ (cf. ([5]), ([7]), ...) ou plus généralement $(\partial_t + at^k A)(\partial_t + bt^k A) + ct^{k-1}A$ (cf. ([4]), ([3]), ([6]), ([1]), ...).

La démonstration du résultat annoncé est faite tout d'abord dans le cas où A est un opérateur auto-adjoint, défini positif et à inverse borné par une méthode qui nous a été inspirée par les techniques utilisées dans ([7]) et ([3]) ; puis dans le cas général on opère comme dans ([1]).

Notons que les méthodes de réduction à une variable et d'homothéties dans le cas où $A = -i \frac{\partial}{\partial x}$, utilisées par exemple dans ([2]), ne semblent pas s'adapter ici.

1. CAS OU A EST DEFINI POSITIF SUR H ET A INVERSE A^{-1} BORNE

1.1 Notations

On utilise les notations de ([7]) (cf. aussi ([3])) que l'on rappelle ici.

Dans ce chapitre 1, A désigne un opérateur linéaire, non borné dans un espace de Hilbert H de domaine dense dans H , auto-adjoint défini positif et ayant un inverse borné A^{-1} (Par exemple l'opérateur A peut être $(1-\Delta_x)^{\theta/2}$, où $\theta > 0$, sur $\mathbb{R}^n$ ou bien une extension auto-adjointe de $|D_x|$ sur $\mathbb{R}$).

On introduit une famille d'"espaces de Sobolev" H^s pour $s \in \mathbb{R}$ ("dans la variable x") définis par A de la façon suivante : si $s \geqslant 0$, H^s est l'espace des éléments u de H tels que $A^s u \in H$ muni de la norme $\|u\|_s = \|A^s u\|_0$ où $\|u\|_0$ désigne la norme de u dans H ; si $s < 0$, H^s est le complété de H pour la norme $\|u\|_s = \|A^s u\|_0$. Etant donnés s et m dans $\mathbb{R}$, A^m est un isomorphisme (pour les structures d'espaces de Hilbert) de H^s sur H^{s-m} (Par exemple, l'opérateur A étant l'opérateur $(1-\Delta_x)^{\theta/2}$, où $\theta > 0$, sur $\mathbb{R}^n$, alors l'espace H^s est l'espace de Sobolev classique dans $\mathbb{R}^n$ d'ordre $s\theta$).

On note par H^{∞} l'intersection des espaces H^s et par $H^{-\infty}$ leur réunion. On munit le premier de la topologie limite projective et le deuxième de la topologie limite inductive. Puisque pour chaque $s \in \mathbb{R}$, H^s et H^{-s} peuvent être regardés comme dual l'un de l'autre, H^{∞} et $H^{-\infty}$ peuvent être regardés comme dual l'un de l'autre.

Soit J un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. On note $C^{\infty}(J;H^{\infty})$ l'espace des fonctions C^{∞} dans J à valeurs dans H^{∞} . C'est l'intersection des espaces $C^j(J;H^k)$ (des fonctions j fois continuement différentiables dans J à valeurs dans H^k) pour tous j et k entiers $\geqslant 0$. On munit $C^{\infty}(J;H^{\infty})$ de la topologie C^{∞} naturelle. Si K est un sous-ensemble compact de J , on note $C_0^{\infty}(K;H^{\infty})$ le sous-espace de $C^{\infty}(J;H^{\infty})$ formé des fonctions qui s'annulent identiquement hors de K . C'est un sous-espace fermé de $C^{\infty}(J;H^{\infty})$ et on note $C_0^{\infty}(J;H^{\infty})$ la limite inductive des $C_0^{\infty}(K;H^{\infty})$ pour tout sous-ensemble compact K de J .

On note par $\mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ le dual de $C_0^{\infty}(J;H^{\infty})$; c'est l'espace des distributions dans J à valeurs dans $H^{-\infty}$.

Soit l'opérateur P différentiel sur $\mathbb{R}$ défini par :

$$P = (\partial_t + at\, A)(\partial_t + bt^k A) + cA$$

où a,b,c sont des nombres complexes, k est un entier impair $\geqslant 3$ et $\mathrm{Re}\, a . \mathrm{Re}\, b < 0$.

<u>DEFINITION 1.1</u> - On dit que P est hypoelliptique dans un ensemble ouvert J de $\mathbb{R}$ si, pour tout sous-ensemble J' de J et toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ tels que $Pu \in C^{\infty}(J';H^{\infty})$, alors $u \in C^{\infty}(J';H^{\infty})$. On dit que P est hypoelliptique au point $t = 0$ s'il existe un voisinage ouvert J de 0 tel que P soit hypoelliptique dans J .

Le résultat important de ce chapitre 1 est :

<u>THEOREME 1.1</u> - L'opérateur P est hypoelliptique en $t = 0$ dans chacun des cas suivants :

i) $\mathrm{Re}\, a > 0$, $\mathrm{Re}\, b < 0$, $\frac{c}{a} \neq 1,2,\ldots$

ii) $\mathrm{Re}\, a < 0$, $\mathrm{Re}\, b > 0$, $\frac{c}{a} \neq 0,-1,-2,\ldots$.

1.2 Une estimation sous-elliptique

Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $V(J)$ le complété de $C_0^\infty(J;H^\infty)$ pour la norme :

$$\|u\|_{V(J)} = \{\int_J \{\|\partial_t u\|_0^2 + \|t^{\frac{k+1}{2}} Au\|_0^2 + \|A^{\frac{1}{2}} u\|_0^2) dt\}^{\frac{1}{2}}$$

et $V'(J)$ le dual de $V(J)$.

On a l'estimation suivante :

PROPOSITION 2.1 - Si $\mathrm{Re}\, a(|a|^2 - 2\mathrm{Re}\, c\,\bar{a}) > 0$, alors il existe $T > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout u tel que $A^{1/2} u \in V(-T,T)$, on ait :

$$\|u\|_{V(-T,T)} \leqslant C\, \|Pu\|_{V'(-T,T)} \quad .$$

Démonstration - Pour $u \in C_0^\infty(J;H^\infty)$ où $J =]-T,T[$ on a :

$$\int_J ((\partial_t + bt^k A)u, (\partial_t - \bar{a}tA)u)_0 dt = \int_J (\|\partial_t u\|_0^2 - abt^{k+1}\|Au\|_0^2 + b(t^k Au, \partial_t u)_0 - a(\partial_t u, tAu)_0) dt \; .$$

Or, par intégrations par parties on a :

$$2\,\mathrm{Re} \int_J (\partial_t u, tAu)_0 dt = - \int_J (u,Au)_0 dt$$
$$2\,\mathrm{Re} \int_J (\partial_t u, t^k Au)_0 dt = - k \int_J (u, t^{k-1}Au)_0 dt \; .$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Re}\,\{\bar{a}\frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|} \int_J (\partial_t u + bt^k Au, \partial_t u - \bar{a}tAu)_0 dt - c\bar{a}\frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|} \int_J (Au,u)_0 dt\}$$

$$= \mathrm{Re}\bar{a}\frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|} \int_J \|\partial_t u\|_0^2 - |a|^2 \frac{\mathrm{Re}b\,\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|} \int_J t^{k+1}\|Au\|_0^2 dt + \frac{|a|^2}{2}\frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|}\int_J (u,Au)_0 dt$$
$$+ \mathrm{Re}\,(\bar{a}b\frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|} \int_J (t^k Au, \partial_t u) dt) - \mathrm{Re}(c\bar{a}\frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|}\int_J (Au,u)_0 dt)$$

$$= |\mathrm{Re}a| \int_J \|\partial_t u\|_0^2 dt - \frac{|a|^2}{|\mathrm{Re}a|}\mathrm{Re}a\,\mathrm{Re}b \int_J t^{k+1}\|Au\|_0^2 dt + (\frac{|a|^2}{2} - \mathrm{Re}\,c\bar{a})\frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|}$$
$$\int_J (Au,u)_0 dt + \mathrm{Re}\,\bar{a}b\frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|}\mathrm{Re}(\int_J (t^k Au, \partial_t u)_0 dt - \mathrm{Im}\,\bar{a}b\frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|}\mathrm{Im}\int_J (t^k Au, \partial_t u)_0 dt$$

$$= |\mathrm{Re}a| \int_J \|\partial_t u\|_0^2 dt - \frac{|a|^2}{|\mathrm{Re}a|}\mathrm{Re}a\,\mathrm{Re}b \int_J t^{k+1}\|Au\|_0^2 dt + \int_J \frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|}(\frac{|a|^2}{2} - \mathrm{Re}c\bar{a} - k\frac{\mathrm{Re}\bar{a}b}{2}$$
$$t^{k-1})(Au,u)_0 dt - \mathrm{Im}\,\bar{a}b\frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|}\mathrm{Im}\int_J (t^k Au, \partial_t u)_0\, dt \quad .$$

Mais $\frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|}(|a|^2 - 2\,\text{Re}\,c\bar{a}) > 0$, $k > 1$ et A est défini positif ; donc il existe $T_1 > 0$ et $C_1 > 0$ tels que si u est nul pour $|t| \geqslant T_1$, on a :

$$\int_J \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|}\left(\frac{|a|^2}{2} - \text{Re}\,c\bar{a} - \frac{\text{Re}\,\bar{a}b}{2}\,k\,t^{k-1}\right)(Au,u)_0 dt \geqslant C_1 \int_J \|A^{\frac{1}{2}} u\|_0^2\,dt \quad .$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$|2\,\text{Im} \int_J (t^k Au, \partial_t u)_0 dt| \leqslant \varepsilon \int_J \|\partial_t u\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_J t^{k-1}\,t^{k+1}\,\|Au\|_0^2\,dt \quad .$$

Comme $\text{Rea Reb} < 0$ et $k+1$ pair, on voit qu'il existe $C_2 > 0$ et $T_2 > 0$ tels que si u est nulle pour $|t| \geqslant T_2$, on a :

$$|\text{Rea}| \int_J \|\partial_t u\|_0^2\,dt - \frac{|a|^2}{|\text{Rea}|}\,\text{Rea Reb} \int_J t^{k+1}\,\|Au\|_0^2\,dt - \text{Im}\,\bar{a}b\,\frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|}\,\text{Im} \int_J (t^k Au, \partial_t u)_0 dt$$

$$\geq C_2 \left\{ \int_J \|\partial_t u\|_0^2\,dt + \int_J t^{k+1}\,\|Au\|_0^2\,dt \right\} \quad .$$

Donc, pour $T = \min(T_1, T_2)$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in C_0^\infty(J; H^\infty)$ on ait (avec $J =]-T,T[$) :

$$\|u\|_{V(J)}^2 \leqslant C\,|< Pu,u >_{V'(J) \times V(J)}| \quad .$$

Soit maintenant u tel que $A^{1/2} u \in V(J)$. Alors $Pu \in V'(J)$; en effet Pu s'écrit :

$$Pu = \partial_t^2 u + abt^{k+1} A^2 u + at\,A\,\partial_t u + bkt^{k-1}\,Au - bt^k\,A\,\partial_t u + c\,Au$$

et $V'(J)$ s'écrit :

$$V'(J) = H^{-1}(J;H) \oplus t^{\frac{k+1}{2}} L^2(J;H) \oplus L^2(J;H^{-\frac{1}{2}})$$

où $H^{-1}(J;H)$ est l'espace de Sobolev classique d'ordre -1 sur J à valeurs dans H ; on vérifie alors que si $A^{1/2} u \in V(J)$, alors chaque terme de Pu appartient à $V'(J)$.

Soit alors une suite (v_n) de $C_0^\infty(J;H)$ convergeant vers $A^{1/2} u$ dans $V(J)$; la suite (u_n) où $u_n = A^{-1/2} v_n$, qui appartient à $C_0^\infty(J;H^\infty)$, converge vers u dans $V(J)$ et $< Pu_n,u_n >_{V'(J) \times V(J)}$ converge vers $< Pu,u >_{V'(J) \times V(J)}$. D'où le résultat.

<u>COROLLAIRE 2.1</u> - On suppose que $\text{Re}\,a\,(|a|^2 - 2\,\text{Re}\,c\bar{a}) > 0$. Il existe $T > 0$ et $C > 0$ tels que si $u \in V(-T,T)$ et $A^{1/2}\,Pu$ $V'(-T,T)$, alors $A^{1/2} u \in V(-T,T)$.

<u>Démonstration</u> --A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T_h)_{h \geqslant 0}$ de contractions sur H . De façon classique, grâce à ce semi-groupe et à l'estimation

de la proposition 2.1 on obtient le corollaire 2.1.

On définit l'espace $W(J)$ par :

$$W(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty}) \ , \ \partial_t^2 u \ , \ t^{k+1} A^2 u \ , \ t A \partial_t u \ , \ Au \in L^2(J;H)\} \ .$$

On a le résultat de régularité maximale suivant :

COROLLAIRE 2.2 - On suppose que $\mathrm{Re}\, a(|a|^2 - 2 \mathrm{Re}\, c\bar{a}) > 0$. Il existe $T > 0$ tel que si $u \in V(-T,T)$ et $Pu \in L^2(-T,T;H)$ alors $u \in W(-T,T)$.

Démonstration - Ce résultat se déduit du corollaire 2.1.

1.3 Les espaces $H^{n,h}$ et $W^{n,h}$

Etant donnés un entier $n \geqslant 0$, un entier impair h et un intervalle ouvert borné J de $\mathbb{R}$, on définit l'espace $H^{n,h}(J)$ par (cf. ([3])) :

$$H^{o,h}(J) = L^2(J;H)$$

$$H^{n,h}(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty}) \ ; \ \partial_t u \ , \ t^h Au \in H^{n-1,h}(J)\} \qquad \text{pour } n \geqslant 1 \ ;$$

cet espace étant muni de la norme canonique.

On définit également l'espace $W^{n,h}(J)$ par :

$$W^{n,h}(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty}) \ ; \ \partial_t^2 u \ , \ t^{h+1} A^2 u \ , \ Au \ , \ t A \partial_t u \in H^{n,h}(J)\} \ ;$$

cet espace étant muni de la norme canonique.

L'opérateur P est linéaire et continu de $W^{n,h}(J)$ dans $H^{n,h}(J)$ et l'espace $W^{n,h}(J)$ est l'espace de régularité maximale associé à l'espace $H^{n,h}(J)$ pour l'opérateur P . Notons que $W^{o,h}(J) = W(J)$.

On définit de façon habituelle les espaces $W^{n,h}_{loc}(J)$ et $H^{n,h}_{loc}(J)$.

PROPOSITION 3.1 - Etant donné $n \geqslant 1$, l'espace $H^{n,h}(J)$ s'injecte continuement dans $H^{n-1,h}(J)$.

Démonstration - Ce résultat se démontre facilement par récurrence sur n .

PROPOSITION 3.2 - Si $0 \notin \bar{J}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $u \in H^{n,h}(J)$

ii) $u \in \mathcal{D}'(J,H^{-\infty})$ avec $\partial_t^j A^{n-j} u \in L^2(J;H)$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$.

Démonstration - Il est immédiat d'après la définition de $H^{n,h}(J)$ que i) implique ii).
On démontre que ii) implique i) par récurrence sur n à l'aide de l'inégalité de Hardy.

On caractérise maintenant l'espace $H^{n,h}(J)$ à l'aide de l'opérateur $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$ et d'un opérateur Z du type $Z = \partial_t + dt^h A$ où d est un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}\, d > 0$.

PROPOSITION 3.4 - Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) $u \in H^{n,h}(J)$

ii) $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ avec $t^{\frac{h-1}{2} j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u \in L^2(J;H)$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$.

Démonstration - Dans une première étape, on démontre que $H^{n,h}(J)$ coïncide avec l'espace $K^{n,h}(J)$ défini par :

$$K^{o,h}(J) = L^2(J;H)$$

$$K^{n,h}(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty}) \ ; \ Zu \ , \ t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \in K^{n-1,h}(J)\} \qquad \text{pour } n \geqslant 1 \ .$$

Tout d'abord, si u est à support compact dans J , on vérifie (grâce à une intégration par parties) que l'on a :

$$h \, \|t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u\|^2_{L^2(J;H)} = - 2 \,\mathrm{Re} \int_J (Zu, t^h Au)_o dt + 2 \,\mathrm{Re}\, d \, \|t^h Au\|^2_{L^2(J;H)} \ ,$$

d'où pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(2 \,\mathrm{Re}\, d - \varepsilon) \, \|t^h Au\|^2_{L^2(J;H)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \, \|Zu\|^2_{L^2(J;H)} + h \, \|t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u\|^2_{L^2(J;H)} \ .$$

D'où l'on déduit le résultat pour $n = 1$. Le cas général se démontre par récurrence sur n en utilisant l'inégalité de Hardy pour vérifier que si $u \in H^{n,h}(J)$ alors $u \in K^{n,h}(J)$.

Ayant démontré cette première étape, il est immédiat que i) implique ii). Inversement, on montre que ii) implique i) par récurrence sur n en utilisant la proposition 4.1.

PROPOSITION 3.5 - Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) $u \in W^{n,h}(J)$

ii) $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ avec $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{p-j} u \in W(J)$ pour $0 \leqslant j \leqslant p \leqslant n$.

Démonstration - La démonstration de ce résultat est basée sur des formules de commutation de l'opérateur $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{p-j}$ et des opérateurs qui interviennent dans la définition de l'espace $W^{n,h}(J)$.

1.4 Propriétés des opérateurs X et Y

Soit l'opérateur $Z = \partial_t + dt^h A$ où d est un nombre complexe et h un entier impair $\geqslant 1$.

On donne tout d'abord quelques inégalités.

PROPOSITION 4.1 - On suppose $\mathrm{Re}\, d > 0$. Etant donnés deux entiers q et $j \geqslant 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout u à support compact dans J , on ait :

$$\|t^q u\|_{L^2(J;H)} \leqslant C \sum_{l=0}^{j} \|t^{\frac{h+1}{2} l} A^{\frac{l}{2}} t^{q+j-l} Z^{j-l} u\|_{L^2(J;H)} .$$

Démonstration - Par intégration par parties, on a :

$$(2q+1) \|t^q u\|_{L^2(J;H)} = -2 \,\mathrm{Re} \int_J (t^{q+1} Zu , t^q u)_0 dt + 2 \,\mathrm{Re}\, d \|t^{\frac{h+1}{2}+q} A^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2(J;H)}$$

d'où l'on déduit le résultat pour $j = 1$.

Le cas général se démontre par récurrence sur j .

PROPOSITION 4.2 - On suppose $\mathrm{Re}\, d < 0$. Etant donnés deux entiers q et $j \geqslant 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout u à support compact dans J , on ait :

$$\|t^q u\|_{L^2(J;H)} \leqslant C \|t^{q+j} Z^j u\|_{L^2(J;H)}$$

$$\|t^{q+j\frac{h-1}{2}} A^{\frac{j}{2}} u\|_{L^2(J;H)} \leqslant C \|t^q Z^j u\|_{L^2(J;H)}$$

$$\|t^{q+jh} A^j u\|_{L^2(J;H)} \leqslant C \|t^q Z^j u\|_{L^2(J;H)} .$$

Démonstration - L'intégration par parties faite dans la proposition 4.1 permet d'obtenir la première inégalité pour $j = 1$. Le cas général se démontre par récurrence sur j .
Des techniques analogues donnent les autres inégalités.

On rappelle maintenant un résultat de résolubilité locale relatif à l'opérateur Z démontré dans (7) :

DEFINITION 4.1 - On dit que Z est localement résoluble en $t = 0$ s'il existe un voisinage ouvert J de 0 tel que pour tout $f \in C_0^\infty(J;H^{-})$ il existe $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ tel que $Pu = f$.

PROPOSITION 4.3 - L'opérateur Z est localement résoluble (resp. hypoelliptique) en $t = 0$ si et seulement si $\text{Re}d > 0$ (resp. < 0).

Démonstration - Cf. (7) .

On note maintenant $X = \partial_t + atA$ et $Y = \partial_t + bt^kA$ où k est un entier. On a les formules suivantes :

PROPOSITION 4.4 - Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe des coefficients e_p et f_p pour $1 \leqslant p \leqslant \inf(k,n+1)$ tels que :

$$Y^n(XY+cA) = (XY+(c+na)A)Y^n + \sum_{p=1}^{\inf(k,n+1)} e_p\, t^{k-p}\, A\, Y^{n-p+1}$$

$$X^n(XY+cA) = (XY+(c-na)A)X^n + \sum_{p=1}^{\inf(k,n+1)} f_p\, t^{k-p}\, A\, X^{n-p+1} \quad .$$

Démonstration - Ces formules se démontrent par récurrence sur n .

PROPOSITION 4.5 - Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe des coefficients complexes g_p et h_p pour $1 \leqslant p \leqslant \inf(k,n)$ tels que :

$$Y^nX = XY^n + na\, A\, Y^{n-1} + \sum_{p=1}^{\inf(k,n)} g_p\, t^{k-p}\, A\, Y^{n-p}$$

$$X^nY = YX^n - na\, A\, X^{n-1} + \sum_{p=1}^{\inf(k,n)} h_p\, t^{k-p}\, A\, X^{n-p} \quad .$$

Démonstration - Ces formules se démontrent par récurrence sur n .

Plus généralement :

PROPOSITION 4.6 - Pour tous entiers m et $n \geqslant 1$, il existe des polynômes $Q(t;x,y)$ et $R(t;x,y)$ en x et y et à coefficients polynômes en t et des polynômes $p_{jq}(t)$ et $r_{jq}(t)$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$ et $0 \leqslant j+q \leqslant m$ tels que :

$$Y^n X^m = \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ 0\leqslant j+q\leqslant m}} p_{jq}(t)\, A^j\, X^{m-q-j} + Q(t;\partial_t,A)\, Y$$

$$X^n Y^m = \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ 0\leqslant j+q\leqslant m}} r_{jq}(t)\, A^j\, Y^{m-q-j} + R(t;\partial_t,A)\, X \ .$$

Démonstration - Pour m fixé, ces formules se démontrent par récurrence sur n à partir de la proposition 4.5.

1.5 Une condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité lorsque $\mathrm{Re}\,a < 0$ et $\mathrm{Re}\,b > 0$

Le principal résultat est le suivant :

THEOREME 5.1 - On suppose $\mathrm{Re}\,a < 0$ et $\mathrm{Re}\,b > 0$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) il existe un entier $n_o \geqslant 0$ tel que étant donnés un entier $n \geqslant n_o$ et un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant 0, pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$, alors $Pu \in H^{n,k}_{loc}(J)$ implique $u \in W^{n,k}_{loc}(J)$;

ii) $\frac{c}{a} \neq -p$ pour tout entier $p \geqslant 0$.

On a ainsi un résultat de régularité maximale dans ces espaces avec poids qui permet d'en déduire facilement le théorème 1.1.

1.5.1 Démonstration de la condition nécessaire d'hypoellipticité

On transforme tout d'abord la propriété d'hypoellipticité de P sous forme d'une estimation :

PROPOSITION 5.1 - On suppose que étant donnés un entier $n \geqslant 0$ et un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant 0 , pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$, alors $Pu \in H^{n,k}_{loc}(J)$ implique $u \in W^{n,k}_{loc}(J)$. Alors il existe $T > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $u \in C_0^\infty(-T,T;H^\infty)$ on ait :

$$\|u\|_{W^{n,k}(-T,T)} \leqslant C \, \|Pu\|_{H^{n,k}(-T,T)} \quad .$$

Démonstration - Par un procédé classique (cf. [3] par exemple), on montre que pour tout compact K de J et tout $\theta_1 \in C_0^\infty(J)$, il existe $\theta_2 \in C_0^\infty(J)$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout $u \in W^{n,k}_{loc}(J)$ à support dans K , on ait :

$$\|\theta_1 u\|_{W^{n,k}(J)} \leqslant C \left(\|\theta_2 Pu\|_{H^{n,k}(J)} + \|u\|_{L^2(J;H)} \right) \quad .$$

De là on déduit qu'il existe $T' > 0$ et $C' > 0$ tels que pour tout $u \in C_0^\infty(-T',T';H^\infty)$ on ait :

$$\|u\|_{W^{n,k}(J)} \leqslant C' \left(\|Pu\|_{H^{n,k}(J)} + \|u\|_{L^2(J;H)} \right) \quad .$$

Comme de plus $\qquad \|u\|_{L^2(J;H)} \leqslant T' \, \|\partial_t u\|_{L^2(J;H)} \leqslant T' \, \|u\|_{W^{n,k}(J)} \quad ,$

on en déduit alors le résultat.

On peut alors démontrer la condition nécessaire d'hypoellipticité pour l'opérateur P :

PROPOSITION 5.2 - On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 0$, $T > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $u \in C_0^\infty(-T,T;H^\infty)$ on ait :

$$\|u\|_{W^{n,k}(-T,T)} \leqslant C \, \|Pu\|_{H^{n,k}(-T,T)} \quad .$$

Alors $\frac{c}{a} \neq -q$ pour tout q entier $\geqslant 0$.

Démonstration - Supposons qu'il existe q entier $\geqslant 0$ tel que $c+qa = 0$. Appliquons l'hypothèse à $X^q u$ pour $u \in C_0^\infty(J;H^\infty)$ où $J = \,]-T,T[$:

$$\|X^q u\|_{W^{n,k}(J)} \leqslant C \, \|P \, X^q u\|_{H^{n,k}(J)} \quad .$$

Or, d'après la proposition 4.4, on en déduit puisque $c+qa = 0$:

$$P\,X^q = X^{q+1}\,Y - \sum_{l=1}^{\inf(k,q+1)} f_l\, t^{k-l}\, A\, X^{q-l+1} \quad .$$

De plus $Y^{p-h}(t^{k-1}u) = \sum_{j=0}^{\inf(k-1,p-h)} g_j\, t^{k-1-j}\, Y^{p-h-j}u$ pour certains coefficients complexes g_j .

Utilisant alors les équivalences de normes données par les propositions 3.5 et 3.4, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in C_0^\infty(J;H^\infty)$, on ait :

$$\sum_{0\leqslant h\leqslant p\leqslant n} \| t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} X^q u\|_{W(J)} \leqslant C \sum_{0\leqslant h\leqslant p\leqslant n} \| t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} X^{q+1} Yu\|_{L^2(J;H)}$$

$$+ \sum_{0\leqslant h\leqslant p\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant l\leqslant \inf(k,q+1)}\ \sum_{0\leqslant j\leqslant \inf(k-1,p-h)} \| t^{\frac{k-1}{2}h+k-l-j} A^{\frac{h}{2}+1} Y^{p-h-j} X^{q+1-l} u\|_{L^2(J;H)}$$

On va montrer que chaque terme du second membre est de la forme $\|QYu\|_{L^2(J;H)}$ où Q est un "opérateur en ∂_t et A" ou bien peut être "absorbé" par un terme du premier membre à condition que u soit à support assez petit au voisinage de $t = 0$.

D'après la proposition 4.6, on a :

$$\| t^{\frac{k-1}{2}h+k-l-j} A^{\frac{h}{2}+1} Y^{p-h-j} X^{q+1-l} u\|_{L^2(J;H)} \leqslant C\ \Big(\|QYu\|_{L^2(J;H)}$$

$$+ \sum_{\substack{0\leqslant r\leqslant p-h-j\\ 0\leqslant s+r\leqslant q+1-l}} \| t^{\frac{k-1}{2}h+k-l-j} A^{r+\frac{h}{2}} X^{q+1-l-s-r} Au\|_{L^2(J;H)} \Big) .$$

En utilisant la proposition 4.2 et l'inégalité de Hardy, on obtient :

$$\| t^{\frac{k-1}{2}h+k-l-j} A^{r+\frac{h}{2}} X^{q+1-l-s-r} Au\|_{L^2(J;H)} \leqslant C \| t^{\frac{k-1}{2}h+k-j-l+s-r+n-h} A^{\frac{h}{2}} \partial_t^{n-h} X^q Au\|_{L^2(J;H)}$$

Or $r \leqslant p-h-j$ donc $k-j-l+s-r+n-h \geqslant k-1 \geqslant 2$; on en déduit donc que ce terme peut être absorbé par $\|X^q u\|_{W^{n,k}(J)}$ pour u à support assez petit au voisinage de $t = 0$.

En conséquence, il existe un entier $m \geqslant 0$ et deux constantes $T' > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $u \in C_0^\infty(-T',T';H^\infty)$ on ait :

$$\|X^q u\|_{W^{n,k}(J)} \leqslant C \sum_{j+h\leqslant m} \|\partial_t^j A^h Yu\|_{L^2(J;H)} \quad .$$

Or, d'après la proposition 4.2 :

$$\|u\|_{L^2(J;H)} \leqslant C \|X^q u\|_{L^2(J;H)} \quad .$$

Ainsi il existerait $T' > 0$, $C' > 0$ et un entier $m \geqslant 0$ tels que pour tout $u \in C_0^\infty(-T',T';H^\infty)$ on ait :

$$\|u\|_{L^2(J;H)} \leqslant C' \sum_{j+h\leqslant m} \|\partial_t^j A^h Yu\|_{L^2(J;H)} \quad .$$

Or, une telle inégalité entraînerait que $Y^* = -(\partial_t - \bar{b}t^k A)$ est localement résoluble en $t = 0$ (cf. (7)) ; ce qui n'est pas d'après la proposition 4.3.

1.5.2 <u>Démonstration de la condition suffisante d'hypoellipticité</u>

La démonstration de la condition suffisante d'hypoellipticité de P est basée sur le résultat de régularité suivant :

<u>PROPOSITION 5.3</u> - On suppose que $\mathrm{Re}\,a < 0$ et $\mathrm{Re}\,b > 0$, qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $-(|a|^2 - 2\,\mathrm{Re}(c+na)\bar{a}) > 0$ et $\frac{c}{a} \neq 0 , \dots , -(n-1)$. Alors il existe $T > 0$ tel que pour u vérifiant :

$$t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in V(-T,T) \quad \text{pour } 0\leqslant h\leqslant p\leqslant n$$

$$t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} Pu \in L^2(-T,T;H) \quad \text{pour } 0\leqslant h\leqslant p\leqslant n \quad (\text{ie } Pu \in H^{n,k}(-T,T))$$

alors

$$t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in W(-T,T) \quad \text{pour } 0\leqslant h\leqslant p\leqslant n \quad (\text{ie } u \in W^{n,k}(-T,T)) \ .$$

<u>Démonstration</u> - 1. On démontre le résultat pour $h = 0$, ie $Y^p u \in W(J)$ pour $0\leqslant p\leqslant n$ où $J =]-T,T[$. Cette démonstration est faite par récurrence sur p .

1.1 On montre tout d'abord que $Y^n u \in W(J)$. Comme $-(|a|^2 - 2\,\mathrm{Re}(c+na)\bar{a}) > 0$, il suffit d'après le corollaire 2.2 que $Y^n u \in V(J)$ et que $(XY+(c+na)A)Y^n u \in L^2(J;H)$. Or, par hypothèse, $Y^n u \in V(J)$, $Y^n Pu \in L^2(J;H)$ et $t^{k-p} A\, Y^{n-p+1} u \in L^2(J;H)$ pour $1\leqslant p \leqslant \inf(k,n+1)$ car $t^{((k-1)/2)h} A^{h/2} Y^{n-h} u \in V(J)$ pour $0\leqslant h\leqslant n$.

Tenant compte de la formule de concatenation de la proposition 4.4, on a le résultat cherché.

1.2 On suppose que pour un p donné avec $1 \leq p \leq n-1$, on a $Y^q u \in W(J)$ pour $p+1 \leq q \leq n$. On montre alors que $Y^p u \in W(J)$. Pour cela on calcule :
$Y^p Pu - Y^{p+2}u = (Y^p X - XY^p)Yu + (X-Y)Y^{p+1}u - c\, A\, Y^p u$
d'après la proposition 4.5 :
$$= (pa+c+g_1 t^{k-1})A\, Y^p u + \sum_{h=2}^{\inf(k,p)} g_h t^{k-h} A\, Y^{p-h+1} + (a-bt^{k-1})tAY^{p+1}u\ .$$
Or $Y^p Pu \in L^2(J;H)$ par hypothèse, $t^{k-h} A\, Y^{p-h+1}u \in L^2(J;H)$ pour $2 \leq h \leq \inf(k,p)$ car $t^{(k-1/2)h} A^{h/2}\, Y^{p-h}u \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$ par hypothèse, $Y^{p+2}u \in L^2(J;H)$ car $Y^{p+1}u \in W(J)$ par hypothèse de récurrence et $A\, Y^{p+1}u \in L^2(J;H)$ car $Y^{p+1}u \in W(J)$ par hypothèse de récurrence. De là, on en déduit que si $pa+c \neq 0$, il existe T éventuellement plus petit que le précédent tel que $A\, Y^p u \in L^2(J;H)$ avec $J =]-T,T[$.
Par suite, pour tout nombre complexe λ, compte tenu de l'hypothèse $Y^p Pu \in L^2(J;H)$, on a $Y^p(XY-\lambda A)u \in L^2(J;H)$. Or $t^{k-h} A\, Y^{p+1-h}u \in L^2(J;H)$ pour $1 \leq h \leq \inf(k,p+1)$. Donc, d'après la formule de concatenation de la proposition 4.4, on a $(XY+(\lambda+pa)A)Y^p u \in L^2(J;H)$ avec $Y^p u \in V(J)$; le corollaire 2.2 montre alors que $Y^p u \in W(J)$ dès que $-(|a|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda+pa)\bar{a}) > 0$.

1.3 On montre enfin que $u \in W(J)$. Pour cela on calcule :
$Pu - Y^2 u = (a-bt^{k-1})t\, A\, Yu + c\, Au$. Or $Pu \in L^2(J;H)$, $Y^2 u \in L^2(J;H)$ car $Yu \in V(J)$ par hypothèse et $(a-bt^{k-1})t\, A\, Yu \in L^2(J;H)$ car $Yu \in W(J)$ d'après 1.2. De là, on en déduit que si $c \neq 0$, alors $Au \in L^2(J;H)$. On termine comme en 1.2.

2. Soit maintenant h tel que $1 \leq h \leq n-1$ et supposons que $t^{(k-1/2)l} A^{l/2}\, Y^{p-l}u \in W(J)$ pour $0 \leq l \leq p \leq n$ avec $l \leq h-1$. Montrons que $t^{(k-1/2)h} A^{h/2}\, Y^{p-h}u \in W(J)$ pour $h \leq p \leq n$.

2.1 On montre d'abord par récurrence sur p que $A\, t^{(k-1/2)h} A^{h/2}\, Y^{p-h}u \in L^2(J;H)$. Pour cela, on forme $A^{h/2}(X\, t^{(k-1/2)h}\, Y^{p-h+1}u) - A^{h/2}\, t^{(k-1/2)h}\, Y^{p-h}\, Pu =$
$$(-c-(p-h)a+g_1 t^{k-1})\, t^{(k-1/2)h} A^{h/2}\, Y^{p-h}u - \sum_{l=2}^{\inf(k,p-h)} g_l\, t^{k-l+(k-1/2)h} A^{h/2+1}$$
$Y^{p-h-l+1}u - \frac{k-1}{2} h\, A^{h/2}\, t^{(k-1/2)h-1}\, Y^{p-h+1}u$. On examine chacun des termes ; ce qui permet de montrer que si $c+(p-h)a \neq 0$, il existe T éventuellement plus petit que le précédent tel que $A\, t^{(k-1/2)h} A^{h/2}\, Y^{p-h}\, u \in L^2(J;H)$ pour $J =]-T,T[$.

2.2 On montre maintenant que $t^{(k-1/2)h} A^{h/2} Y^{p-h}u \in W(J)$ pour $h \leq p \leq n$. De ce qui précède, on déduit, comme en 1.2, que $(XY+(\lambda+(p-h)aA))(t^{(k-1/2)h} A^{h/2} Y^{p-h}u) \in L^2(J;H)$ pour tout λ et $t^{(k-1/2)h} A^{h/2} Y^{p-h}u \in L^2(J;H)$. Le corollaire 2.2 montre alors que $t^{(k-1/2)h} A^{h/2} Y^{p-h}u \in W(J)$.

3. On démontre enfin que $t^{(k-1/2)n} A^{n/2} u \in W(J)$. Le calcul fait en 2.1 vaut pour $p = h = n$, d'où l'on déduit que $A\, t^{k-1/2\, n} A^{n/2} u \in L^2(J;H)$. Puis on termine comme précédemment.

La proposition 5.3 est ainsi démontrée.

On peut alors démontrer la condition suffisante d'hypoellipticité. Soit n_o tel que $-(|a|^2 - 2\,\mathrm{Re}(c+n_o a)\bar{a}) > 0$. Soient un entier $n \geq n_o$, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et u une distribution de $\mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ telle que $Pu \in H^{n,k}_{loc}(J)$. En dehors de $t = 0$, P est elliptique ; par suite, le résultat de régularité est vrai en dehors de $t = 0$ et il suffit de démontrer cette régularité sur un voisinage $J =]-T,T[$ de 0 . Tout d'abord, comme $t = 0$ n'est pas caractéristique pour P , il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $t^{(k-1/2)h} A^{h/2} Y^{p-h} A^s u \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$. Comme on peut supposer $s \leq 0$, l'hypothèse $Pu \in H^{n,k}(J)$ implique que $P(A^s u) \in H^{n,k}(J)$. Donc, d'après la proposition précédente 5.3, on en déduit en particulier que $t^{(k-1/2)h} A^{h/2} Y^{p-h}(A^{s+1/2}u) \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$. De proche en proche, on arrive ainsi à $t^{(k-1/2)h} A^{h/2} Y^{p-h}u \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$ et donc $u \in W^{n,k}(J)$ d'après la proposition 5.3.

<u>Remarque 5.1</u> - Lorsque $\mathrm{Re}\, a < 0$ et $\mathrm{Re}\, b > 0$, l'opérateur X est hypoelliptique en $t = 0$ alors que Y n'est pas hypoelliptique en $t = 0$, d'après la proposition 4.3. La régularité de l'opérateur $P = XY+cA$ faite précédemment est donnée dans des espaces construits à partir de l'opérateur Y qui n'est pas hypoelliptique.

1.6 <u>Une condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité lorsque $\mathrm{Re} a > 0$ et $\mathrm{Re} b < 0$</u>

Le principal résultat est le suivant :

<u>THEOREME 6.1</u> - On suppose $\mathrm{Re} a > 0$ et $\mathrm{Re} b < 0$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) il existe un entier $n_o \geq 0$ tel que étant donnés un entier $n \geq n_o$ et un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant 0 , pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$, alors $Pu \in H^{n,1}_{loc}(J)$ implique $u \in W^{n,1}_{loc}(J)$;

ii) $\frac{c}{a} \neq p$ pour tout entier $p \geqslant 1$.

On a ainsi un résultat de régularité maximale dans ces espaces avec poids qui permet d'en déduire facilement le théorème 1.1.

Les démonstrations sont analogues au cas précédent (où $Re a < 0$) ; en fait, elles se simplifient notablement puisque les espaces $H^{n,1}$ et $W^{n,1}$ ne font plus intervenir de poids lorsqu'on les définit à partir des opérateurs $A^{1/2}$ et X . La démonstration de la condition nécessaire utilise l'inégalité

$$\|u\|_{W^{n,1}(J)} \leqslant C \|Pu\|_{H^{n,1}(J)}$$

que l'on applique à $Y^{q-1}u$ (et non à $Y^q u$, car il y a une commutation de X et de Y à effectuer) si l'on suppose que $-c+qa = 0$ pour un q entier $\geqslant 1$; on arrive ainsi à une inégalité qui montrerait que $X^* = -(\partial_t - a\,t\,A)$ est localement résoluble en $t = 0$; ce qui n'est pas.

<u>Remarque 6.1</u> - Lorsque $Re a > 0$ et $Re b < 0$, l'opérateur X n'est pas hypoelliptique en $t = 0$ alors que Y est hypoelliptique en $t = 0$ d'après la proposition 4.3. La régularité de l'opérateur $P = XY+cA$ faite précédemment est donnée dans des espaces construits à partir de l'opérateur X qui n'est pas hypoelliptique.

2. <u>CAS GENERAL</u>

2.1 <u>Notations</u>

Soit $(E_\lambda)_{-\infty<\lambda<+\infty}$ la résolution spectrale de A (cf. [8]). On utilise les notations de [1] que l'on rappelle ici.

Pour $\varepsilon > 0$, on considère les trois projections orthogonales de H définies par les opérateurs $E_{-\varepsilon}$, $E_{+\varepsilon} - E_{-\varepsilon}$ et $I - E_\varepsilon$ et les sous-espaces correspondants $H_- = E_{-\varepsilon}H$, $H_o = (E_\varepsilon - E_{-\varepsilon})H$ et $H_+ = (I-E_\varepsilon)H$. Ces espaces sont orthogonaux deux à deux et déterminent H par $H = H_- \oplus H_o \oplus H_+$. Soit A_- la restriction de A aux éléments de son domaine qui sont dans H_- ; dans H_- , l'opérateur A_- est auto-adjoint, défini négatif et à inverse borné. Soit A_o la restriction de A aux éléments de H_o ; dans H_o , l'opérateur A_o est auto-adjoint et borné. Enfin soit A_+ la restriction de A aux éléments de son domaine qui appartiennent à H_+ ; dans H_+ , l'opérateur A_+ est auto-adjoint, défini positif et à inverse borné. Ces trois opérateurs déterminent l'opérateur A par $A = A_- + A_o + A_+$.

Puisque $-A_-$ est un opérateur auto-adjoint, défini positif et à inverse borné dans H_- , on peut définir comme en I la famille d'espaces de Sobolev H_-^s pour $s \in \mathbb{R}$. De même, puisque A_+ est un opérateur auto-adjoint, défini positif et à inverse borné dans H_+ , on peut définir la famille d'espaces de Sobolev H_+^s pour $s \in \mathbb{R}$. On pose alors $H^s = H_-^s \oplus H_o \oplus H_+^s$ et on définit comme en 1. les espaces $C^\infty(J;H^\infty)$ et $\mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ où J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

DEFINITION 1.1 - On dit que P est hypoelliptique dans un ensemble ouvert J de $\mathbb{R}$ si pour tout sous-ensemble ouvert J' de J et toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ tels que $Pu \in C^\infty(J';H^\infty)$, alors $u \in C^\infty(J';H^\infty)$.

On dit que P est hypoelliptique au point $t = 0$ s'il existe un voisinage ouvert J de 0 tel que P soit hypoelliptique dans J .

2.2 Condition suffisante d'hypoellipticité quand $\mathrm{Re}\,a\,\mathrm{Re}\,b < 0$

L'opérateur P est le même qu'en I . Le principal résultat est le suivant :

THEOREME 2.1 - Si $\mathrm{Re}\,a\,\mathrm{Re}\,b < 0$ et si $\frac{c}{a}$ n'est pas un entier de $\mathbb{Z}$, alors P est hypoelliptique en $t = 0$.

Démonstration - Supposons par exemple $\mathrm{Re}\,a > 0$ et $\mathrm{Re}\,b < 0$.

Si $\frac{c}{a} \neq p$ pour tout entier $p \geqslant 1$, le théorème 1.1 de 1. montre que l'opérateur $P_+ = (\partial_t + at\,A_+)(\partial_t + bt^k\,A_+) + c\,A_+$ est hypoelliptique en $t = 0$ relativement à l'espace H_+ .

Si $\frac{c}{a} \neq -p$ pour tout entier $p \geqslant 0$, le théorème 1.1 de 1. montre que l'opérateur $P_- = (\partial_t + (-a)t(-A_-))(\partial_t + (-b)t^k(-A_-)) + (-c)(-A_-)$ est hypoelliptique en $t = 0$ relativement à l'espace H_- .

Enfin, l'opérateur $P_o = (\partial_t + at\,A_o)(\partial_t + bt^k\,A_o) + c\,A_o$ est hypoelliptique en $t = 0$ relativement à l'espace H_o puisque A_o est un opérateur borné dans H_o .

Comme P est égal à $P_- + P_o + P_+$, on en déduit que P est hypoelliptique en $t = 0$ dès que $\frac{c}{a} \neq p$ pour tout entier p de $\mathbb{Z}$.