INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLICATIONS

SAMIR FARKH

KARIM NOUR

Résultats de complétude pour des classes de types du système $\mathcal{AF}2$

Informatique théorique et applications, tome 31, nº 6 (1997), p. 513-537

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1997__31_6_513_0>

© AFCET, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 31, n° 6, 1997, pp. 513-537)

RÉSULTATS DE COMPLÉTUDE POUR DES CLASSES DE TYPES DU SYSTÈME $\mathcal{AF}2$

par Samir FARKH et Karim NOUR [1]

Communiqué par R. CORI (*)

Résumé. – *J.-L. Krivine a introduit le système de typage $\mathcal{AF}2$ pour obtenir des programmes (λ-termes) calculant des fonctions en écrivant des démonstrations de leur totalité. Nous présentons dans ce papier des résultats de complétude pour certains types de $\mathcal{AF}2$ et pour plusieurs notions de réductions. Ces résultats généralisent un théorème de R. Labib-Sami établi dans le système $\mathcal{F}$ de J.-Y. Girard.*

Abstract. – *J.-L. Krivine introduced the $\mathcal{AF}2$ type system in order to obtain programs (λ-terms) which calculate functions, by writing demonstrations of their totalities. We present in this paper two results of completeness for some types of $\mathcal{AF}2$ and for many notions of reductions. These results generalize a theorem of R. Labib-Sami established in the system $\mathcal{F}$ of J.-Y. Girard.*

1. INTRODUCTION

Le système de typage $\mathcal{F}$ a été introduit par J.-Y. Girard (voir [2]). Ce système est basé sur le calcul propositionnel intuitionniste du second ordre, et donc donne la possibilité de quantifier sur les types. En plus du théorème de normalisation forte qui assure la terminaison des programmes, le système $\mathcal{F}$ a deux autres propriétés :

- Il permet d'écrire des programmes pour toutes les fonctions dont la terminaison est démontrable dans l'arithmétique de Peano du second ordre.
- Il permet de définir tous les types de données courants : booléens, entiers, listes, etc.

La sémantique du système $\mathcal{F}$ proposée par J.-Y. Girard consiste à associer à chaque type A un ensemble de λ-termes $\mid A \mid$, dans le but d'obtenir

(*) Reçu avril 1997, accepté février 1998.

[1] LAMA - Équipe de Logique, Université de Savoie, 73376 Le Bourget du Lac. E-mail : sfarkh,nour@univ-savoie.fr

0988-5004/97/06/© AFCET-Elsevier, Paris

le résultat suivant : Si un λ-terme t est de type A, alors il appartient à l'ensemble $\mid A \mid$. Ce résultat est connu sous le nom du lemme d'adéquation, et permet de démontrer la normalisation forte du système $\mathcal{F}$.

La réciproque du lemme d'adéquation n'est pas en général vraie, mais R. Labib-Sami a démontré dans [7] un résultat de ce genre pour les types clos à quantificateurs positifs.

Le système de typage $\mathcal{AF}2$, introduit par J.-L. Krivine (voir [4]), est basé sur la logique intuitionniste du second ordre. Au plan des propriétés théoriques, normalisation forte et représentation des fonctions calculables, le système $\mathcal{AF}2$ ne se distingue pas du système $\mathcal{F}$. La différence provient de sa capacité à exprimer les spécifications exactes des programmes, ce qui permet d'obtenir un programme calculant une fonction en écrivant une démonstration du fait que la fonction est du bon type. J.-L. Krivine a proposé une sémantique pour son système, et il a démontré un lemme d'adéquation permettant d'obtenir l'une des plus importantes propriétés du système $\mathcal{AF}2$: C'est l'unicité de la représentation des données.

Dans ce papier, nous démontrons deux résultats de complétude du système $\mathcal{AF}2$, c'est-à-dire, des équivalences entre la syntaxe du système et ses sémantiques :

- Le premier résultat de complétude est obtenu pour les types à quantificateurs positifs en utilisant une sémantique basée sur les ensembles des λ-termes stables par la $\beta\eta$-équivalence, ce qui constitue une généralisation du résultat de R. Labib-Sami établi dans le système $\mathcal{F}$.
- Le second résultat de complétude est établi pour une classe restreinte de types (les bons types positifs) qui englobe les types de données de J.-L. Krivine en utilisant une sémantique basée sur les ensembles des λ-termes stables par la β-expansion. Ce résultat nous permet de comprendre d'où provient la η-équivalence dans le premier résultat.

Les démonstrations de ces résultats reposent essentiellement sur des propriétés syntaxiques du système $\mathcal{AF}2$ (voir [9]). Ces résultats donnent une réponse partielle à la question de la comparaison entre opérateurs de mise en mémoire sémantiques (à la Krivine) et syntaxiques (à la Nour). Les deux notions sont en effet identiques dans le cas des classes pour lesquelles la sémantique de Krivine est complète (voir [10]).

L'article est organisé de la manière suivante :

- Dans la partie 1, nous rappelons des préliminaires sur le λ-calcul pur et nous présentons le système de typage $\mathcal{AF}2$ ainsi que ses propriétés.

Nous donnons, à la fin de cette partie, quelques résultats syntaxiques du système que nous utilisons dans les démonstrations.

- La partie 2 est consacrée à la sémantique proposée par J.-L. Krivine. Nous rappelons ensuite le lemme d'adéquation du système $\mathcal{AF}2$.
- Dans la partie 3, nous démontrons une réciproque du lemme d'adéquation pour les types à quantificateurs du second ordre positifs avec la $\beta\eta$-équivalence.
- Dans la partie 4, nous présentons un résultat analogue pour une classe restreinte de types à quantificateurs du second ordre positifs (les bons types), et avec la β-réduction. Nous montrons enfin que les conditions que nous imposons sur les types sont toutes nécessaires.

1. LE λ-CALCUL PUR ET TYPÉ

Nous allons adopter dans cet article les notations de J.-L. Krivine, par exemple :

On note Λ l'ensemble des termes du λ-calcul, dits aussi λ-termes. Étant donnés des λ-termes $t, u, u_1, ..., u_n$, l'application de t à u sera notée $(t)u$, et $(...((t)u_1)...)u_n$ sera noté $(t)u_1...u_n$. On note par $\to_\beta$ (resp. $\to_\eta$) la β-réduction (resp. la η-réduction) et par $\simeq_\beta$ (resp. $\simeq_{\beta\eta}$) la β-équivalence (resp. la $\beta\eta$-équivalence). Si t est un λ-terme, on note par $Fv(t)$ l'ensemble de ses variables libres. Alors on a clairement : $Fv((t)u) = Fv(t) \cup Fv(u)$ et $Fv(\lambda xu) = Fv(u) - \{x\}$. De plus si $t \to_\beta t'$, alors $Fv(t') \subseteq Fv(t)$, et si $t \to_\eta t'$, alors $Fv(t) = Fv(t')$.

LEMME 1.1 : *Soient t et t' deux λ-termes.*

Si $t \to_{\beta\eta} t'$, alors il existe un λ-terme u, tel que $t \to_\beta u$ et $u \to_\eta t'$.

Preuve: Voir [1]. ♠

LEMME 1.2 : (i) *Si t est $\beta\eta$-équivalent à un terme normalisable, alors t est normalisable.*

(ii) Si *t est $\beta\eta$-équivalent à un terme clos, alors t est β-équivalent à un terme clos.*

Preuve: Voir [1] et [4]. ♠

On considère le calcul des prédicats intuitionniste du second ordre, écrit avec les symboles suivants :

- Les seuls symboles logiques $\to$ et $\forall$;

- Des variables d'individu : $x, y, ...$ (appelées aussi variables du premier ordre) ;
- Des variables de relation n-aire ($n = 0, 1, ...$) : $X, Y, ...$ (appelées aussi variables du second ordre) ;
- Des symboles de fonction n-aire ($n = 0, 1, ...$) sur les individus ;
- Des symboles de relation n-aire ($n = 0, 1, ...$) sur les individus.

Chaque variable de relation, et chaque symbole de fonction ou de relation a une arité $n \geq 0$ fixée. Un symbole de fonction 0-aire sera appelé **symbole de constante**. Une variable de relation 0-aire est aussi appelée **variable propositionnelle**.

On suppose qu'il y a une infinité de variables d'individu, et, pour chaque $n \geq 0$, une infinité de variables de relation n-aire.

La donnée des symboles de fonction et de relation constitue ce qu'on appelle un **langage**, les autres symboles étant communs à tous les langages.

Les **termes** sont construits de la façon suivante :

- Chaque variable d'individu, et chaque symbole de constante est un terme ;
- Si f est un symbole de fonction n-aire, et $t_1, ..., t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, ..., t_n)$ est un terme.

Les **formules** sont construites de la façon suivante :

- Si A est une variable ou un symbole de relation n-aire, et $t_1, ..., t_n$ sont des termes, alors $A(t_1, ..., t_n)$ est une formule dite **formule atomique** ;
- Si A, B sont des formules, alors $A \to B$ est une formule ;
- Si A est une formule, alors $\forall x A$ et $\forall X A$ sont des formules, x (resp. X) étant une variable d'individu (resp. de relation).

On définit les notions de variables **libres** et **liées** de manière usuelle.

Un terme est dit **clos** s'il n'a pas de variable. Une formule est dite **close** si elle n'a pas de variable libre. La **clôture** d'une formule F est la formule obtenue en quantifiant universellement toutes les variables libres de F.

Soit $\boldsymbol{\xi} = \xi_1, ..., \xi_n$ une suite finie de variables du premier et/ou du second ordre.

- La formule $\forall \xi_1 ... \forall \xi_n F$ est notée $\forall \boldsymbol{\xi} F$;
- L'écriture $\ll$ $\boldsymbol{\xi}$ n'est pas libre dans A $\gg$ signifie que ξ_i $(1 \leq i \leq n)$ n'est pas libre dans A.

La notation $t[u_1/x_1, ..., u_n/x_n]$ (resp. $F[u_1/x_1, ..., u_n/x_n]$) représente le résultat de la substitution simultanée de u_1 à x_1,..., u_n à x_n dans le terme t (resp. dans la formule F).

Si X est une variable de relation unaire, t et t' deux termes, alors la formule $\forall X[Xt \rightarrow Xt']$ est notée $t = t'$ et est dite **équation fonctionnelle** ou **formule équationnelle**. Un **cas particulier** de l'équation $t = t'$ est une formule de la forme :

$t[u_1/x_1, ..., u_n/x_n] = t'[u_1/x_1, ..., u_n/x_n]$ ou $t'[u_1/x_1, ..., u_n/x_n] = t[u_1/x_1, ..., u_n/x_n]$, $u_1, ..., u_n$ étant des termes du langage.

Considérons un langage L du second ordre, et un système E d'équations fonctionnelles de L. On décrit un système de λ-calcul typé, appelé **Arithmétique Fonctionnelle du second ordre** (en abrégé $\mathcal{AF}2$), dont les types sont les formules de L. Dans l'écriture des termes typés de ce système, nous emploierons les mêmes symboles pour les variables du λ-calcul et les variables d'individu du langage L. Un **contexte** Γ est un ensemble $x_1 : A_1, ..., x_n : A_n$ de déclarations, où $x_1, ..., x_n$ sont des variables distinctes du λ-calcul, et $A_1, ..., A_n$ des formules de L.

Étant donnés un λ-terme t, un type A et un contexte $\Gamma = x_1 : A_1, ..., x_n : A_n$, on définit au moyen des règles suivantes la notion $\ll$ t est typable, à l'aide du système équationnel E, de type A dans le contexte Γ $\gg$. Cette notion est notée $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A$.

(1) $$\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} x_i : A_i (1 \leq i \leq n)$$

(2) $$\frac{\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{AF}2} t : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} \lambda xt : A \rightarrow B}$$

(3) $$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} u : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} v : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} (u)v : B}$$

(4) $$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : \forall x A} \ (^*)$$

(5) $$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : \forall x A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A[u/x]} \ (^{**})$$

(6) $$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : \forall X A} \ (^*)$$

(7) $$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : \forall X A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A[F/X(x_1, ..., x_n)]} \;(^{**})$$

(8) $$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A[u/x]}{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A[v/x]} \;(^{***})$$

Avec les conditions suivantes :

(*) x et X ne sont pas libres dans Γ.

(**) u est un terme et F est une formule.

$A[F/X(x_1, ..., x_n)]$ est obtenue en remplaçant dans A chaque formule atomique $X(t_1, ..., t_n)$ par $F[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]$.

(***) $u = v$ est un cas particulier d'une équation de E.

LEMME 1.3 : (i) *Si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A$ *et* $\Gamma \subseteq \Gamma'$, *alors* $\Gamma' \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A$.

(ii) *Si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A$, *alors* $\Gamma' \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A$, *où* Γ' *est la restriction de* Γ *aux déclarations contenant les variables libres de* t.

Preuve: Par induction sur $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A$. ♠

Le système $\mathcal{AF}2$ possède les propriétés suivantes :

THÉORÈME 1.4 : (i) *Si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A$, *et* $t \to_\beta t'$, *alors* $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t' : A$.

(ii) *Si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} t : A$, *alors* t *est fortement normalisable.*

Preuve: Voir [4]. ♠

Soient L un langage du second ordre et E un système d'équations de L. On définit sur l'ensemble des termes de L une relation d'équivalence notée $\approx_E$ de la manière suivante :

$$a \approx_E b \Leftrightarrow E \vdash a = b.$$

Le lemme suivant décrit l'équivalence qu'on vient de définir.

LEMME 1.5 : $a \approx_E b$ *ssi on peut l'obtenir au moyen des règles suivantes :*

(i) *si* $a = b$ *est un cas particulier d'une équation de* E, *alors* $a \approx_E b$;

(ii) *quels que soient les termes* a, b, c *de* L, *on a :*

– $a \approx_E a$;

– *si* $a \approx_E b$ *et* $b \approx_E c$, *alors* $a \approx_E c$;

(iii) *si* f *est un symbole de fonction* n*-aire de* L, *et si* $a_i \approx_E b_i$ $(1 \leq i \leq n)$, *alors* $f(a_1, ..., a_n) \approx_E f(b_1, ..., b_n)$.

Preuve: Voir [4]. ♠

Le lemme suivant permet de généraliser la règle (8) de typage équationnelle.

LEMME 1.6 : *Si* $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} u : B[a/x]$ *et* $a \approx_E b$, *alors* $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} u : B[b/x]$.

Preuve: Par induction sur la preuve de $a \approx_E b$, on considère la dernière règle utilisée.

- Si c'est la règle (i), alors c'est évident.
- Si c'est la règle (ii), alors ou bien $b = a$, et dans ce cas on a le résultat, ou bien $a \approx_E c$ et $c \approx_E b$, et donc par hypothèse d'induction, on a $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} u : B[c/x]$ et $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} u : B[b/x]$.
- Si c'est la règle (iii), alors $a = f(a_1, ..., a_n)$ et $b = f(b_1, ..., b_n)$, avec $a_i \approx_E b_i$ $(1 \leq i \leq n)$. On a $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} u : B[f(a_1, ..., a_n)/x]$, donc $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} u : (B[f(x_1, ..., a_n)/x])[a_1/x_1]$, par suite, d'après l'hypothèse d'induction, $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} u : (B[f(x_1, ..., a_n)/x])[b_1/x_1]$. Ainsi de suite, en utilisant l'hypothèse d'induction n fois, on obtient le résultat. ♠

Nous allons présenter le théorème de programmation pour les entiers.

Étant donnés deux λ-termes t, u et un entier k, on pose, par définition, $(t)^k u = (t)...(t)u$ (le λ-terme t étant répété k fois au second membre) ; en particulier $(t)^0 u = u$. On définit le λ-terme $\underline{k} = \lambda x \lambda f (f)^k x$; $\underline{k}$ est appelé ≪ l'entier k du λ-calcul ≫ (ou **entier de Church**).

On définit le **type des entiers naturels** par la formule suivante :

$$N[x] = \forall X\{X0 \to [\forall y(Xy \to Xsy) \to Xx]\},$$

0 étant une constante pour le zéro, et s un symbole de fonction unaire pour le successeur.

Un système d'équations E est dit **adéquat** pour le type des entiers ssi :

- $s(a) \not\approx_E 0$;
- Si $s(a) \approx_E s(b)$, alors $a \approx_E b$.

Soit f une fonction de $\mathbf{N}^k$ dans $\mathbf{N}$. On dit que E est un système d'équations **définissant la fonction** f ssi :

$$f(s^{n_1}(0), ..., s^{n_k}(0)) \approx_E s^{f(n_1, ..., n_k)}(0).$$

Soit f une fonction totale de $\mathbf{N}^k$ dans $\mathbf{N}$. Étant donné un λ-terme P_f, on dira que P_f **représente la fonction** f si, quels que soient $n_1, ..., n_k \in \mathbf{N}$:

$$(P_f)\underline{n_1}...\underline{n_k} \to_\beta \underline{f(n_1, ..., n_k)}.$$

THÉORÈME 1.7 (théorème de programmation) : *Soient f une fonction de $\mathbf{N}^m$ dans $\mathbf{N}$, et E un système d'équations adéquat définissant f. Si P_f est un λ-terme tel que : $\vdash_{\mathcal{AF}2} P_f : \forall x_1 ... \forall x_m \{N[x_1] \to (... \to (N[x_m] \to N[f(x_1, ..., x_m)])...)\}$, alors P_f représente la fonction f.*

Preuve: Voir [4]. ♠

EXEMPLE : Considérons par exemple la fonction prédécesseur $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, définie à l'aide des équations : $p(0) = 0$; $p(sx) = x$. Un λ-terme t qui représente la fonction p (autrement dit un programme pour p), est donc un terme de type (dans le système $\mathcal{AF}2$) la formule $\forall x\{N[x] \to N[p(x)]\}$. ♠

Le théorème de programmation se généralise à tous les types de données syntaxiques de J.-L. Krivine (voir [4] et [6]).

Les résultats que nous allons présenter maintenant permettent une simplification dans les démonstrations syntaxiques (voir [9]).

On définit sur les types de $\mathcal{AF}2$ les deux relations binaires $<'$ et $\sim'$ de la manière suivante:

- $\forall x A <' A[u/x]$, si u est un terme du langage ;
- $\forall X A <' A[F/X(x_1, ..., x_n)]$, si F est une formule du langage ;
- $A \sim' B$ ssi $A = C[u/x]$, $B = C[v/x]$, et $u = v$ est un cas particulier d'une équation.

Soient $\leq$ et $\sim$ les clôtures réflexives et transitives respectives de $<'$ et $\sim'$.

On note $A < B$ ssi $A \leq B$ et $A \neq B$.

On a le résultat suivant :

THÉORÈME 1.8 : (1) *Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} x : A$, alors A s'écrit $\forall \xi C'$, où ξ n'est pas libre dans Γ, et il existe deux types C et B tels que $C \sim C'$, $B \leq C$ et $(x : B) \in \Gamma$.*

(2) *Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} \lambda x u : A$, alors A s'écrit $\forall \xi (B' \to C')$, où ξ n'est pas libre dans Γ, et il existe deux types C et B tels que $C \sim C'$, $B \sim B'$ et $\Gamma, x : B \vdash_{\mathcal{AF}2} u : C$.*

(3) *Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} (u)v : A$, alors A s'écrit $\forall \xi D''$, où ξ n'est pas libre dans Γ, et il existe trois types F, C et D tels que $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} u : F$, $F \leq C \to D$, $D \leq D'$, $D' \sim D''$ et $\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2} v : C$.*

Preuve: Voir [9]. ♠

COROLLAIRE 1.9 : *Si* $\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{AF}2} (x)u_1...u_n : B$, *alors :*
$n = 0$, $A \leq C$, $C \sim C'$, $B = \forall \xi C'$, *et* ξ *n'est libre ni dans* Γ *ni dans* A,
ou
$n \neq 0$, $A \leq C_1 \to B_1, B'_i \leq C_{i+1} \to B_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $B'_n \leq B_{n+1}$, *et* $B = \forall \xi B'_{n+1}$ *où* $B_i \sim B'_i$ $(1 \leq i \leq n+1)$, $\Gamma, x : A \vdash_{\mathcal{AF}2} u_i : C_i$ $(1 \leq i \leq n)$, *et* ξ *n'est libre ni dans* Γ *ni dans* A.

Preuve: Voir [9]. ♠

2. Λ-MODÈLE

Les sémantiques que nous allons présenter dans ce paragraphe sont dûes à J.-L. Krivine (voir [4]). Elles dépendent des classes de parties de λ-termes appelées habituellement ≪ parties saturées ≫. Nous allons utiliser dans ce papier deux de ces sémantiques, la première est basée sur les parties stables par la $\beta\eta$-équivalence et la deuxième sur les parties stables par la β-expansion.

Une partie G de Λ est dite **$\to_\beta$-saturée** (resp. **$\simeq_{\beta\eta}$-saturée**) si, quels que soient les termes t et u, on a :

$$u \in G \text{ et } t \to_\beta u \text{ (resp. } t \simeq_{\beta\eta} u) \Rightarrow t \in G.$$

Étant données deux parties G et G' de Λ, on définit une partie de Λ, notée $G \to G'$, en posant : $u \in (G \to G') \Leftrightarrow (u)t \in G'$ quel que soit $t \in G$.

Il est clair que l'intersection d'un ensemble de parties $\to_\beta$-saturées (resp. $\simeq_{\beta\eta}$-saturées) de Λ est $\to_\beta$-saturée (resp. $\simeq_{\beta\eta}$-saturée). De plus si G' est $\to_\beta$-saturée (resp. $\simeq_{\beta\eta}$-saturée), alors $G \to G'$ est $\to_\beta$-saturée (resp. $\simeq_{\beta\eta}$-saturée) pour toute partie $G \subset \Lambda$.

Considérons maintenant l'ensemble $P_{S_\beta(\Lambda)}$ (resp. $P_{S_{\beta\eta}(\Lambda)}$) de toutes les parties $\to_\beta$-saturées (resp. $\simeq_{\beta\eta}$-saturées) de Λ. Un sous-ensemble R de $P_{S_\beta(\Lambda)}$ (resp. $P_{S_{\beta\eta}(\Lambda)}$) est dit **adéquat** si :

- $G, G' \in R \Rightarrow (G \to G') \in R$;
- Pour toute partie σ de R, l'intersection des éléments de σ appartient à R. En particulier $\Lambda \in R$ (prendre $\sigma = \emptyset$).

Soit L un langage du second ordre. On va définir la notion d'un **Λ_β-modèle** (resp. **$\Lambda_{\beta\eta}$-modèle**) pour L :

C'est une modification de la notion classique d'un modèle du second ordre, dans lequel l'ensemble des valeurs de vérité n'est pas $\{0, 1\}$ comme d'habitude, mais un sous-ensemble adéquat R de $P_{S_\beta(\Lambda)}$ (resp. $P_{S_{\beta\eta}(\Lambda)}$).

Un Λ_β-modèle (resp. $\Lambda_{\beta\eta}$-modèle) pour le langage L est la donnée de :

- Un ensemble $\mid M \mid$ supposé non vide, appelé la base de M ;
- Un sous-ensemble adéquat R de $P_{S_\beta(\Lambda)}$ (resp. $P_{S_{\beta\eta}(\Lambda)}$) ($R$ est appelé l'ensemble des valeurs de vérité de M) ;
- Pour tout symbole de fonction n-aire de L, une fonction $f_M :\mid M \mid^n \rightarrow \mid M \mid$;
- Pour tout symbole de relation n-aire P de L, une fonction $P_M : \mid M \mid^n \rightarrow R$.

Soit M un Λ_β-modèle (resp. $\Lambda_{\beta\eta}$-modèle) pour L. **Une interprétation** I est, par définition, une application de l'ensemble des variables d'individu (resp. de relation n-aire) dans $\mid M \mid$ (resp. dans $R^{\mid M \mid^n}$).

Soient I une interprétation, x (resp. X) une variable d'individu (resp. de relation n-aire), et a (resp. Φ) un élément de $\mid M \mid$ (resp. de $R^{\mid M \mid^n}$). On définit une interprétation $J = I[x \leftarrow a]$ (resp. $J = I[X \leftarrow \Phi]$) en posant $J(x) = a$ (resp. $J(X) = \Phi$) et $J(\xi) = I(\xi)$ (resp. $J(\xi') = I(\xi')$) pour toute variable $\xi \neq x$ (resp. $\xi' \neq X$).

Définissons maintenant la valeur d'une formule de L dans M et dans une interprétation I.

A chaque terme t de L est associée sa **valeur** $t_{M,I} \in \mid M \mid$, définie par induction sur t :

- Si t est une variable x, alors $t_{M,I} = I(x)$;
- Si $t = f(t^1, ..., t^n)$, alors $t_{M,I} = f_M(t^1_{M,I}, ..., t^n_{M,I})$.

Soit F une formule de L. La **valeur** de F dans M et dans l'interprétation I, notée par $\mid F \mid_{M,I}$ est un élément de R défini par induction sur F au moyen des règles suivantes :

- Si F est une formule atomique $P(t^1, ..., t^n)$, où P est un symbole (resp. une variable) de relation n-aire, et $t^1, ..., t^n$ sont des termes de L, alors on définit $\mid F \mid_{M,I}$ par $P_M(t^1_{M,I}, ..., t^n_{M,I})$ (resp. $I(X)(t^1_{M,I}, ..., t^n_{M,I})$) qui est un élément de R ;
- Si F est $G \rightarrow H$, alors $\mid F \mid_{M,I} = \mid G \mid_{M,I} \rightarrow \mid H \mid_{M,I}$;
- Si F est $\forall x G$, où x est une variable d'individu, alors $\mid F \mid_{M,I} = \bigcap \{\mid G[x] \mid_{M,I[x \leftarrow a]} ; a \in \mid M \mid\}$;
- Si F est $\forall X G$, où X est une variable de relation n-aire, alors $\mid F \mid_{M,I} = \bigcap \{\mid G[X] \mid_{M,I[X \leftarrow \Phi]} ; \Phi \in R^{\mid M \mid^n}\}$.

Il est clair que la valeur $\mid F \mid_{M,I}$ ne dépend que des valeurs dans I des variables libres de F. En particulier, si A est un type clos, $\mid F \mid_{M,I}$ ne dépend pas de l'interprétation I, on la notera alors $\mid F \mid_M$.

Soient M un Λ_β-modèle (resp. $\Lambda_{\beta\eta}$-modèle) pour L, et $u = v$ une équation de L. On dit que M **satisfait** $u = v$, si la clôture de cette formule est vraie dans M.

Si E est un ensemble d'équations de L, on dit que M **satisfait** E, ou que M est un **modèle de** E, si M satisfait toute équation de E.

Pour tout type clos A, on note par $| A |_\beta = \bigcap\{| A |_M / M \Lambda_\beta$-modèle de $E\}$, et par $| A |_{\beta\eta} = \bigcap\{| A |_M / M \Lambda_{\beta\eta}$-modèle de $E\}$.

THÉORÈME 2.1 (lemme d'adéquation) : *Soient E un ensemble fini d'équations d'un langage L, t un λ-terme, et A un type clos du système $\mathcal{AF}2$. Si $\vdash_{\mathcal{AF}2} t : A$, alors $t \in | A |_\beta$ (resp. $t \in | A |_{\beta\eta}$) .*

Preuve: Voir [5]. ♠

Dans la démonstration de ce théorème, on utilise les deux lemmes suivants :

LEMME 2.2 : *Soient t un terme, et A une formule de L ayant x comme variable libre, alors : $| A[t/x] |_{M,I} = | A |_{M,I[x \leftarrow t_{M,I}]}$.*

LEMME 2.3 : *Soit F une formule de L, ayant $x_1, ..., x_n$ comme variables libres, et soit $\Phi \in R^{|M|^n}$ définie par $\Phi(a_1, ..., a_n) = | F |_{M,I[x_1 \leftarrow a_1, ..., x_n \leftarrow a_n]}$ pour tout $a_1, ..., a_n \in | M |$. Si A est une formule ayant X (variable de relation n-aire) comme variable libre, alors : $| A[F/X(x_1, ..., x_n)] |_{M,I} = | A |_{M,I[X \leftarrow \Phi]}$.*

REMARQUE : Pour avoir le lemme d'adéquation, il suffit de donner la définition suivante d'ensemble saturé G : quels que soient les termes $t, t_1, ..., t_n, u$,
$(u[t/x])t_1...t_n \in G \Rightarrow (\lambda x u)tt_1...t_n \in G$.

Dans la suite nous allons démontrer des réciproques du théorème 2.1.

3. PREMIER RÉSULTAT DE COMPLÉTUDE

Dans ce paragraphe, nous allons généraliser le résultat de R. Labib-Sami pour le système $\mathcal{AF}2$, et pour une classe plus large de types.

On définit de la façon suivante les types **à quantificateurs positifs** (resp. **à quantificateurs négatifs**), notés en abrégé $\forall_2^+$ (resp. $\forall_2^-$) :

- Une formule atomique est $\forall_2^+$ (resp. $\forall_2^-$) ;
- Si A est $\forall_2^+$ (resp. $\forall_2^-$) et B est $\forall_2^-$ (resp. $\forall_2^+$), alors $B \rightarrow A$ est $\forall_2^+$ (resp. $\forall_2^-$) ;

- Si A est $\forall_2^+$, et x (resp. X) une variable d'individu (resp. de relation n-aire), alors $\forall x A$ (resp. $\forall X A$) est $\forall_2^+$;
- Si A est $\forall_2^-$ et x (resp. X) une variable d'individu (resp. de relation n-aire qui ne figure pas dans A), alors $\forall x A$ (resp. $\forall X A$) est $\forall_2^-$.

Les formules $\forall_2^+$ (resp. $\forall_2^-$) sont les formules où les quantificateurs du second ordre ≪ actifs ≫ sont en position positive (resp. négative) dans la formule.

Il est facile de voir que : Si A est $\forall_2^+$ (resp. $\forall_2^-$) et $A \sim B$, alors B est $\forall_2^+$ (resp. $\forall_2^-$). De plus si A est $\forall_2^-$ et $A \leq B \to C$, alors B est $\forall_2^+$ et C est $\forall_2^-$.

K. Nour a défini dans [8] le système de typage $\mathcal{AF}2_0$ qui n'est autre que le système $\mathcal{AF}2$ où on remplace la règle de typage (7) par la règle :

$$(7_0) \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2_0} t : \forall X A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{AF}2_0} t : A[Y/X(x_1, ..., x_n)]}$$

où Y est une variable ou symbole de relation de même arité que X.

THÉORÈME 3.1 : *Soient A un type $\forall_2^+$ du système $\mathcal{AF}2$, et t un λ-terme normal clos. Si $\vdash_{\mathcal{AF}2} t : A$, alors $\vdash_{\mathcal{AF}2_0} t : A$.*

Preuve: Voir [8]. ♠

Soient L un langage du second ordre et E un système d'équations de L, ce qui définit le système de typage $\mathcal{AF}2$.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME I : **Soient A un type $\forall_2^+$ clos du système $\mathcal{AF}2$, et t un λ-terme, alors : $t \in\mid A \mid_{\beta\eta}$ <u>ssi</u> il existe un λ-terme t' tel que $t \simeq_{\beta\eta} t'$ et $\vdash_{\mathcal{AF}2} t' : A$.**

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de certaines définitions et d'un lemme.

Soient $\Omega = \{x_i / i \in \mathbf{N}\}$ une énumération d'un ensemble infini de variables du λ-calcul, et $\{A_i / i \in \mathbf{N}\}$ une énumération des types $\forall_2^-$ de $\mathcal{AF}2$, où chaque type $\forall_2^-$ se répète une infinité de fois. On définit alors l'ensemble $\Gamma^- = \{x_i : A_i / i \in \mathbf{N}\}$. Soit u un λ-terme, tel que $Fv(u) \subseteq \Omega$. On définit le contexte Γ_u^- comme étant la restriction de Γ^- sur les déclarations contenant les variables de $Fv(u)$. La notation $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{AF}2} u : B$ exprime que $\Gamma_u^- \vdash_{\mathcal{AF}2} u : B$.

On pose $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{AF}2}^{\beta\eta} u : B$ ssi il existe un λ-terme u', tel que $u \simeq_{\beta\eta} u'$ et $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{AF}2} u' : B$.

Considérons M_0 l'ensemble de tous les termes de L. On définit un $\Lambda_{\beta\eta}$-modèle $\mathcal{M}_{\Gamma^-}$ (noté dans la suite $\mathcal{M}$) de la façon suivante :

- L'ensemble de base est $|\mathcal{M}| = \dfrac{M_0}{\approx_E}$ (l'ensemble des classes d'équivalence modulo la relation $\approx_E$) ;
- L'ensemble adéquat $R = P_{S_{\beta\eta}}(\Lambda)$;
- L'interprétation de chaque symbole de fonction n-aire f est l'application $f_{\mathcal{M}}$ de $\mid \mathcal{M} \mid^n$ dans $\mid \mathcal{M} \mid$ définie par $f_{\mathcal{M}}(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) = \overline{f(a_1, ..., a_n)}$;
- L'interprétation de chaque symbole de relation n-aire P est l'application $P_{\mathcal{M}}$ de $\mid \mathcal{M} \mid^n$ dans $P_{S_{\beta\eta}}(\Lambda)$ définie par $P_{\mathcal{M}}(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) = \{\tau \in \Lambda : \Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}2} \tau : P(a_1, ..., a_n)\}$.

Ensuite on définit une interprétation $\mathcal{I}$ sur les variables en posant :

- $\mathcal{I}(x) = \overline{x}$, où $\overline{x}$ est la classe de x modulo $\approx_E$;
- $\mathcal{I}(X) = \Phi$, où Φ est l'application de $\mid \mathcal{M} \mid^n$ dans $P_{S_{\beta\eta}}(\Lambda)$ définie par $\Phi(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) = \{\tau \in \Lambda : \Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}2} \tau : X(a_1, ..., a_n)\}$.

Les $f_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{M}}$, et Φ sont bien définies. En effet :

Si $(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) = (\overline{b_1}, ..., \overline{b_n})$, alors $a_i \approx_E b_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Donc, d'après le lemme 1.5, $f(a_1, ..., a_n) \approx_E f(b_1, ..., b_n)$, et par conséquent $f_{\mathcal{M}}(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) = f_{\mathcal{M}}(\overline{b_1}, ..., \overline{b_n})$.

De même supposons que $(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) = (\overline{b_1}, ..., \overline{b_n})$, donc $a_i \approx_E b_i$ $(1 \leq i \leq n)$. D'où, d'après le lemme 1.6, $\{\tau \in \Lambda : \Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}2} \tau : P(a_1, ..., a_n)\} = \{\tau \in \Lambda : \Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}2} \tau : P(b_1, ..., b_n)\}$, ou alors, $P_{\mathcal{M}}(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) = P_{\mathcal{M}}(\overline{b_1}, ..., \overline{b_n})$.

La même démonstration se fait pour Φ. ♠

Le lemme suivant va nous permettre de démontrer le théorème I.

LEMME 3.2 : *Soient S une formule du langage L, et τ un λ-terme.*

(i) *Si S est $\forall_2^+$, et $\tau \in \mid S \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, alors $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}2} \tau : S$.*

(ii) *Si S est $\forall_2^-$, et $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}2} \tau : S$, alors $\tau \in \mid S \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$.*

Preuve: Par induction simultanée sur les types $\forall_2^+$ et $\forall_2^-$.

Preuve de (i)

- Si S est atomique, alors $S = X(a_1, ..., a_n)$, où les a_i sont des termes, et X une variable (resp. un symbole) de relation n-aire. Soit $\tau \in \mid S \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}} = \mid X(a_1, ..., a_n) \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}} = \{\theta \in \Lambda : \Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}2} \theta : X(a_1, ..., a_n)\}$. Il en résulte que $\tau \in \mid S \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$ ssi $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}2} \tau : S$.

- Si $S = B \to C$, où B est $\forall_2^-$ et C est $\forall_2^+$, soit $\tau \in\mid B \to C \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$. Il existe une infinité de $i \in \mathbf{N}$ tel que $B = A_i$. On choisit un i de façon que x_i ne soit pas libre dans τ. On a $x_i : B \vdash_{\mathcal{AF}2} x_i : B$, donc, d'après (ii), $x_i \in\mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, et alors $(\tau)x_i \in\mid C \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, et donc, d'après l'hypothèse d'induction, $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}_2} (\tau)x_i : C$. Donc il existe un λ-terme τ' tel que $(\tau)x_i \simeq_{\beta\eta} \tau'$ et $\Gamma^-_{\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} \tau' : C$, par suite $\tau \simeq_{\beta\eta} \lambda x_i(\tau)x_i \simeq_{\beta\eta} \lambda x_i\tau'$. Si $x_i \in Fv(\tau')$, alors $\Gamma^-_{\lambda x_i\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} \lambda x_i\tau' : B \to C$. Sinon on peut écrire $\Gamma^-_{\tau'}, x_i : B \vdash_{\mathcal{AF}_2} \tau' : C$, et comme $Fv(\tau') = Fv(\lambda x_i\tau')$, alors $\Gamma^-_{\lambda x_i\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} \lambda x_i\tau' : B \to C$. Par conséquent $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}_2} \tau : S$.
- Si $S = \forall XB$, avec B est $\forall_2^+$, alors $\tau \in\mid \forall XB \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}} \Leftrightarrow (\forall\Phi :\mid \mathcal{M} \mid^n \to P_{S_{\beta\eta}(\Lambda)})(\tau \in\mid B[X] \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[X\leftarrow\Phi]}$. Soit Y une variable de relation n-aire qui ne figure pas dans Γ^-_τ et B. Donc $\tau \in\mid B[X] \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[X\leftarrow|Y|_{\mathcal{M},\mathcal{I}}]} = \mid B[Y/X] \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, d'après le lemme 2.3. D'où par hypothèse d'induction, $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}_2} \tau : B[Y]$, donc il existe un λ-terme τ' tel que $\tau \simeq_{\beta\eta} \tau'$ et $\Gamma^-_{\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} \tau' : B[Y]$. Par conséquent il existe un λ-terme u tel que $\tau \to_{\beta\eta} u$ et $\tau' \to_{\beta\eta} u$, et, d'après le lemme 1.1, il existe un λ-terme τ'' tel que $\tau' \to_\beta \tau''$ et $\tau'' \to_\eta u$. Donc $Fv(u) = Fv(\tau'') \subseteq Fv(\tau')$ et $\Gamma^-_{\tau''} \vdash_{\mathcal{AF}_2} \tau'' : B[Y]$, d'où, par le choix de Y et le fait que $Fv(\tau'') \subseteq Fv(\tau)$, on déduit que $\Gamma^-_{\tau''} \vdash_{\mathcal{AF}_2} \tau'' : \forall YB[Y]$, et donc $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}_2} \tau : S$.
- Si $S = \forall xB$, avec B est $\forall_2^+$, alors $\tau \in\mid \forall xB \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}} \Leftrightarrow (\forall a \in \mid \mathcal{M} \mid)(\tau \in\mid B[x] \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[x\leftarrow a]})$. Soit y une variable de L qui ne figure pas dans les formules de Γ^-_τ et B. Alors on a : $\overline{y} \in\mid \mathcal{M} \mid$, donc $\tau \in\mid B[x] \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[x\leftarrow\overline{y}]} = \mid B[y/x] \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$ (d'après le lemme 2.2). D'où, d'après l'hypothèse d'induction, $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}_2} \tau : B[y]$, et par le même raisonnement qu'au cas précédent et le choix de y, on obtient $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}_2} \tau : S$.

<u>*Preuve de* (ii)</u>

- Si S est atomique, le résultat découle immédiatement de la définition de $I_\mathcal{M}$ (voir (i)).
- Si $S = B \to C$, où B est $\forall_2^+$ et C est $\forall_2^-$, supposons $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}_2} \tau : B \to C$. Donc il existe un λ-terme τ' tel que $\tau \simeq_{\beta\eta} \tau'$ et $\Gamma^-_{\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} \tau' : B \to C$. Si $u \in\mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, alors d'après (i), $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}_2} u : B$, donc il existe un λ-terme u' tel que $u \simeq_{\beta\eta} u'$ et $\Gamma^-_{u'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} u' : B$. D'où $\Gamma^-_{(\tau')u'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} (\tau')u' : C$, et comme $(\tau)u \simeq_{\beta\eta} (\tau')u'$, alors $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}_2} (\tau)u : C$. D'où, d'après l'hypothèse d'induction, $(\tau)u \in\mid C \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$. Par conséquent $\tau \in\mid B \to C \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$.

- Si $S = \forall x B$, où B est $\forall_2^-$, supposons que $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}2} \tau : \forall x B$ (-), et soit $a \in \mid \mathcal{M} \mid$. Donc $a = \bar{b}$, où b est un terme de L. D'après (-), il existe un λ-terme τ' tel que $\tau \simeq_{\beta\eta} \tau'$ et $\Gamma^-_{\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}2} \tau' : \forall x B$, par suite $\Gamma^-_{\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}2} \tau' : B[b/x]$. Donc, d'après l'hypothèse d'induction, $\tau' \in \mid B[b/x] \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}} = \mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[x \leftarrow \bar{b}]} = \mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[x \leftarrow a]}$ (d'après le lemme 2.2). Comme $\mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[x \leftarrow a]}$ est $\simeq_{\beta\eta}$-saturée, on aura $\tau \in \mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[x \leftarrow a]}$.
- Si $S = \forall X B$, où B est $\forall_2^-$, supposons que $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}2} \tau : \forall X B$. Alors il existe un λ-terme τ' tel que $\tau \simeq_{\beta\eta} \tau'$ et $\Gamma^-_{\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}2} \tau' : B$, donc $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{AF}2} \tau' : B$, et par hypothèse d'induction, $\tau' \in \mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$. Donc $\tau' \in \mid \forall X B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, car X ne figure pas dans B, et comme $\mid \forall X B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$ est $\simeq_{\beta\eta}$-saturée, on aura $\tau \in \mid \forall X B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$. ♠

On peut déduire maintenant la preuve du théorème I.

Preuve du théorème I :

- La condition suffisante est une conséquence directe du théorème 2.1, et du fait que l'interprétation d'un type du système $\mathcal{AF}2$ dans un $\Lambda_{\beta\eta}$-modèle M est une partie $\simeq_{\beta\eta}$-saturée.
- La condition est nécessaire. En effet : Soient A un type $\forall_2^+$ clos, et t un λ-terme tel que $t \in \mid A \mid_{\beta\eta}$, alors $t \in \mid A \mid_{\mathcal{M}}$, pour tout $\Lambda_{\beta\eta}$-modèle $\mathcal{M}$ associé à un ensemble Γ^- (comme décrit avant). De plus on peut supposer que Γ^- ne contient pas de déclarations pour les variables libres de t, i.e $\Gamma^-_t = \emptyset$. D'après le (i) du lemme 3.2, $\Gamma^- \vdash^{\beta\eta}_{\mathcal{AF}2} t : A$, donc il existe un λ-terme t' tel que $t \simeq_{\beta\eta} t'$ et $\Gamma^-_{t'} \vdash_{\mathcal{AF}2} t' : A$, par suite, il existe un λ-terme u tel que $t \to_{\beta\eta} u$ et $t' \to_{\beta\eta} u$, et d'après le lemme 1.1, il existe un λ-terme t'' tel que $t' \to_{\beta} t''$ et $t'' \to_{\eta} u$. D'où $Fv(t'') \subseteq Fv(t')$ et $\Gamma^-_{t''} \vdash_{\mathcal{AF}2} t'' : A$. Or $Fv(t'') = Fv(u) \subseteq Fv(t)$, donc $\Gamma^-_{t''} \subseteq \Gamma^-_t = \emptyset$, par conséquent $t \simeq_{\beta\eta} t''$ et $\vdash_{\mathcal{AF}2} t'' : A$. ♠

D'après le théorème 3.1, on peut déduire le résultat suivant :

THÉORÈME 3.3 : *Soient A un type $\forall_2^+$ clos du système $\mathcal{AF}2$, et t un λ-terme, alors :*
$t \in \mid A \mid_{\beta\eta}$ <u>ssi</u> il existe un λ-terme t' tel que $t \simeq_{\beta\eta} t'$ et $\vdash_{\mathcal{AF}2_0} t' : A$.

COROLLAIRE 3.4 : *Soient A un type $\forall_2^+$ clos du système $\mathcal{AF}2$, et t un λ-terme. Si $t \in \mid A \mid_{\beta\eta}$, alors t est normalisable et β-équivalent à un terme clos.*

Preuve: Si $t \in \mid A \mid_{\beta\eta}$, alors, d'après le théorème I, il existe un λ-terme t' tel que $t \simeq_{\beta\eta} t'$ et $\vdash_{\mathcal{AF}2} t' : A$. Donc t est $\beta\eta$-équivalent à un terme normalisable clos. D'où le résultat d'après le lemme 1.2. ♠

REMARQUE : La condition $\forall_2^+$ est nécessaire pour avoir le théorème I. En effet, soit

$$D = \forall X\{\forall Y(Y \to X) \to X\}$$

Il est clair que D n'est pas $\forall_2^+$. Posons $t = \lambda x(x)(\delta)\delta$, où $\delta = \lambda x(x)x$, alors on a : $t \in \mid D \mid_{\beta\eta}$, et t n'est pas normalisable. Pour montrer que t est bien un terme de $\mid D \mid_{\beta\eta}$, soit M un $\Lambda_{\beta\eta}$-modèle, montrons que $t \in \mid \forall Y(Y \to X) \to X \mid_{M,[X\leftarrow\Xi]}$ pour tout $\Xi \in P_{S_{\beta\eta}}(\Lambda)$. Soient $u \in \mid \forall Y(Y \to X) \mid_{M,[X\leftarrow\Xi]}$, et Ξ' l'ensemble des λ-termes qui ne sont pas normalisables. Ξ' est évidemment une partie $\simeq_{\beta\eta}$-saturée de Λ. Comme $u \in \mid \forall Y(Y \to X) \mid_{M,[X\leftarrow\Xi]}$, alors $u \in \mid Y \to X \mid_{M,[X\leftarrow\Xi],[Y\leftarrow\Xi']}$, c'est-à-dire $u \in \Xi' \to \Xi$. On a $(\delta)\delta \in \Xi'$, donc $(u)(\delta)\delta \in \Xi$. Or $(t)u = (\lambda x(x)(\delta)\delta)u \to_\beta (u)(\delta)\delta$, d'où $(t)u \in \Xi$.

Posons $t' = \lambda x(x)y$, où y est une variable. On a : $t' \in \mid D \mid_{\beta\eta}$, et t' n'est pas $\beta\eta$-équivalent à un terme clos. En effet, d'une part t' est normal et non clos, d'autre part nous montrons que $t' \in \mid D \mid_{\beta\eta}$, soient M un $\Lambda_{\beta\eta}$-modèle quelconque, et $u \in \mid \forall Y(Y \to X) \mid_{M,[X\leftarrow\Xi]}$ pour tout $\Xi \in P_{S_{\beta\eta}}(\Lambda)$. Considérons Ξ'' l'ensemble des λ-termes qui sont $\beta\eta$-équivalent à une variable. Ξ'' est évidemment une partie $\simeq_{\beta\eta}$-saturée de Λ. Alors $u \in \mid Y \to X \mid_{M,[X\leftarrow\Xi],[Y\leftarrow\Xi'']}$, c'est-à-dire $u \in \Xi'' \to \Xi$, et comme $y \in \Xi''$, on obtient $(u)y \in \Xi$. Or $(t')u = (\lambda x(x)y)u \to_\beta (u)y$, d'où $(t')u \in \Xi$. ♠

Le système de typage $\mathcal{F}$ de J.-Y. Girard est le sous-système de $\mathcal{AF}2$, où on a seulement des variables propositionnelles et des constantes (symboles de relation 0-aire). Donc les variables du premier ordre, les symboles de fonction et le système d'équations sont inutiles. Les règles de typages sont les règles $(1), (2), (3)$ et $(6), (7)$ du système $\mathcal{AF}2$ restreintes aux variables propositionnelles.

Si on se restreint au système $\mathcal{F}$, un Λ_β-modèle (resp. $\Lambda_{\beta\eta}$-modèle) est composé uniquement d'une partie adéquate R de $P_{S_\beta(\Lambda)}$ (resp. $P_{S_{\beta\eta}(\Lambda)}$), et pour toute constante (resp. variable) propositionnelle P, d'un élément $\mid P \mid_M$ de R.

Le théorème I s'énonce dans le système $\mathcal{F}$ de la façon suivante :

THÉORÈME 3.5 : *Soient A un type $\forall_2^+$ clos du système $\mathcal{F}$, et t un λ-terme. $t \in \mid A \mid_{\beta\eta}$ ssi il existe un λ-terme t' tel que $t \simeq_{\beta\eta} t'$ et $\vdash_{\mathcal{F}} t' : A$.*

Ce théorème a été démontré par R. Labib-Sami (voir [7]).

4. SECOND RÉSULTAT DE COMPLÉTUDE

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer un théorème analogue au théorème I avec la β-réduction et pour une classe plus restreinte de types.

Les types **propres** sont définis de la façon suivante :

- Une formule atomique est propre ;
- Si A et B sont propres, alors $A \to B$ est propre ;
- Si A est propre, et x (resp. X) une variable d'individu (resp. de relation n-aire qui figure dans A), alors $\forall x A$ (resp. $\forall X A$) est propre.

On définit de la façon suivante les types **positifs** (resp. **négatifs**), notés en abrégé $\forall^+$ (resp. $\forall^-$) :

- Une formule atomique est $\forall^+$ (resp. $\forall^-$) ;
- Si A est $\forall^+$ (resp. $\forall^-$ qui ne commence pas par un quantificateur du premier ordre) et B est $\forall^-$ (resp. $\forall^+$), alors $B \to A$ est $\forall^+$ (resp. $\forall^-$) ;
- Si A est $\forall^+$, et X une variable de relation qui figure dans A, alors $\forall X A$ est $\forall^+$;
- Si A est $\forall^-$, alors $\forall x A$ est $\forall^-$.

D'après cette définition chaque type $\forall^+$ (resp. $\forall^-$) est propre.

Précisément les types $\forall^+$ sont les types où :

- Les quantificateurs du second ordre ≪ actifs ≫ sont positifs.
- Les quantificateurs du premier ordre sont négatifs.
- Les seules variables du second ordre sur lesquelles on peut quantifier sont ≪ actives ≫.
- On n'a pas le droit de mettre un quantificateur du premier ordre juste derrière une flèche.

D'après la définition ci-dessus, on peut remarquer que si A est $\forall^-$, alors A est de la forme $\forall \boldsymbol{\xi}(A_1 \to (A_2 \to (... \to (A_n \to X(t_1, ..., t_n))...)))$, où $\boldsymbol{\xi}$ est une suite finie de variables du premier ordre, A_i $(1 \leq i \leq n)$ des types $\forall^+$, et X une variable ou un symbole de relation n-aire.

Il est clair que si A est un type $\forall^-$ et $A \leq B$, alors B est $\forall^-$, et une variable du second ordre qui est libre dans B est aussi libre dans A.

Soit A un type. On définit les **sous-types positifs** (resp. **négatifs**) de A de la façon inductive suivante :

- Si $A = X(t_1, ..., t_n)$, alors A est le seul type positif et négatif de A.
- Si $A = B \to C$, alors les sous-types positifs (resp. négatifs) de A sont les sous-types négatifs (resp. positifs) de B, et les sous-types positifs (resp. négatifs) de C.

- Si $A = \forall XB$ (resp. $\forall xB$), alors les sous-types positifs (resp. négatifs) de A sont les sous-types positifs (resp. négatifs) de B.

Les sous-types positifs (resp. négatifs) d'un type forment en général un ensemble infini, car par exemple pour le type $\forall XB[X]$, il faut considérer comme sous-types positifs, $B[Y]$, $B[Z]$, etc. Intuitivement, on écrit la formule avec des noms différents pour les variables liées auxquelles on associe des ensembles dénombrables disjoints de variables. Pour chacune des variables liées, on utilise l'ensemble correspondant de variables. Illustrons maintenant cette définition (non formelle) par un exemple. Soient $A = \forall X\{X \to \forall Y(Y \to X)\}$, $\{X_i/i \geq 0\}$ et $\{Y_i/i \geq 0\}$ deux ensembles disjoints de variables propositionnelles. Les sous-types négatifs de A sont : $X_i, Y_i, i \geq 0$ et ses sous-types positifs sont : A, $\forall Y(Y \to X_i), Y_j \to X_i, X_i$ avec $i, j \geq 0$.

D'autre part, on appelle **type avec substitution**, tout type de la forme $A[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]$, obtenu par substitution simultanée de t_1 à x_1,..., t_n à x_n dans le type A, où x_1,..., x_n sont des variables d'individu, et t_1,..., t_n des termes du langage.

On dit qu'un type $\forall^+$ (resp. $\forall^-$) A **satisfait la condition (*)** si, lorsque B et C sont deux sous-types négatifs (resp. positifs) avec substitution de A, alors on ne peut pas avoir les propriétés suivantes :

$$B < G, G \sim C_n,$$

et

$$C \leq C_1 \to (C_2 \to (... \to (C_n \to D)...)),$$

où $C_1, C_2, ..., C_n, D$ et G sont des types du système $\mathcal{AF}2$.

Rappelons bien que $B < G$ signifie que $B \leq G$ et $B \neq G$.

Pour la vérification de la condition (*), il s'agit d'un test s'appartenant à l'unification modulo une théorie équationnelle E (ou E-unification), et donc il est facile de voir qu'il est indécidable lui aussi, par exemple par recodage du problème de Post ou du dixième problème de Hilbert (voir [3]). Ce test est donc par définition difficile en général.

On dit qu'un type A est un **bon type positif** (resp. **bon type négatif**), noté en abrégé $\mathcal{B}^+$ (resp. $\mathcal{B}^-$) s'il est $\forall^+$ (resp. $\forall^-$) et satisfait la condition (*).

REMARQUES : (1) J.-L. Krivine a présenté dans [6] une méthode pour définir les types de données syntaxiques du système $\mathcal{AF}2$. Par exemples :

- Le type booléen est la formule :

$$B[x] = \forall X\{X0 \to (X1 \to Xx)\},$$

où 0 et 1 sont des symboles de constante.

- Le type des entiers naturels est déjà défini.
- Le type des listes d'éléments de type U est la formule :

$$LU[x] = \forall X\{X\emptyset \to [\forall y \forall z(U[y] \to (Xz \to Xcons(y,z))) \to Xx]\},$$

où $cons$ est un symbole de fonction binaire et $\emptyset$ une constante.

(2) K. Nour a défini dans [8] une autre classe des types de données (types de données descendants). On peut vérifier également que ces types sont tous des $\mathcal{B}^+$. ♠

Soient L un langage du second ordre et E un système d'équations de L, ce qui définit le système de typage $\mathcal{AF}2$.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME II **Soient A un type $\mathcal{B}^+$ clos du système $\mathcal{AF}2$, et t un λ-terme, alors:** $t \in \mid A \mid_\beta$ $\underline{ssi}$ $t \to_\beta t'$ **et** $\vdash_{\mathcal{AF}2} t' : A$:

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de certaines définitions et d'un lemme.

Soit A un type $\mathcal{B}^+$ du système $\mathcal{AF}2$. On note $\mathcal{B}_s^+$ (resp. $\mathcal{B}_s^-$), l'ensemble des sous-types positifs (resp. négatifs) avec substitution de A. Soient $\Omega = \{x_i / i \in \mathbf{N}\}$ une énumération d'un ensemble infini de variables du λ-calcul, et notons par A_i ($i \in \mathbf{N}$) les sous-types $\mathcal{B}_s^-$ de A, où chaque type A_i se répète une infinité de fois. On définit alors l'ensemble $\Gamma_A^- = \{x_i : A_i / i \in \mathbf{N}\}$. Soit u un λ-terme, tel que $Fv(u) \subseteq \Omega$. On définit le contexte $\Gamma_{A,u}^-$ comme étant la restriction de Γ_A^- sur les déclarations contenant les variables de $Fv(u)$. La notation $\Gamma_A^- \vdash_{\mathcal{AF}_2} u : B$ exprime que $\Gamma_{A,u}^- \vdash_{\mathcal{AF}_2} u : B$.

On pose $\Gamma_A^- \vdash_{\mathcal{AF}_2}^\beta u : B$ ssi il existe un λ-terme u', tel que $u \to_\beta u'$ et $\Gamma_A^- \vdash_{\mathcal{AF}_2} u' : B$.

On définit le Λ_β-modèle $\mathcal{M}$ et l'interprétation $\mathcal{I}$ de la même façon qu'au paragraphe 3 (en remplaçant Γ^- par Γ_A^- et la $\beta\eta$-équivalence par la β-réduction). Alors on a le lemme suivant :

LEMME 4.1 : (i) *Si S est un sous-type $\mathcal{B}_s^+$ de A, et $\tau \in \mid S \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, alors $\Gamma_A^- \vdash_{\mathcal{AF}_2}^\beta \tau : S$.*

(ii) *Si S est un sous-type $\mathcal{B}_s^-$ de A, et $\Gamma_A^- \vdash_{\mathcal{AF}_2}^\beta \tau : S$, alors $\tau \in \mid S \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$.*

Preuve: Par induction simultanée sur les sous-types $\mathcal{B}_s^+$ et $\mathcal{B}_s^-$ de A (la complexité étant le nombre de symboles logiques dans le type).

<u>*Preuve de* (i)</u>

- Si S est atomique, alors on a la même preuve que celle du lemme 3.2.
- Si $S = \forall XB$, où B est $\mathcal{B}_s^+$, alors $\tau \in\mid \forall XB \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}} \Leftrightarrow (\forall\Phi :\mid \mathcal{M} \mid^n \rightarrow P_{S_\beta(\Lambda)})(\tau \in\mid B[X] \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[X\leftarrow\Phi]}$. Soit Y une variable de relation n-aire qui ne figure pas dans $\Gamma^-_{A,\tau}$ et B. Donc $\tau \in\mid B[X] \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[X\leftarrow\mid Y\mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}]} = \mid B[Y/X] \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, d'après le lemme 2.3. D'où par hypothèse d'induction, $\Gamma^-_A \vdash^\beta_{\mathcal{AF}_2} \tau : B[Y]$, donc il existe un λ-terme τ' tel que $\tau \rightarrow_\beta \tau'$ et $\Gamma^-_{A,\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} \tau' : B[Y]$. Comme $Fv(\tau') \subseteq Fv(\tau)$, alors par le choix de Y, on déduit que $\Gamma^-_{A,\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} \tau' : \forall YB[Y] = \forall XB$, et donc $\Gamma^-_A \vdash^\beta_{\mathcal{AF}_2} \tau : S$.
- Si $S = B \rightarrow C$, où B est $\mathcal{B}_s^-$ et C est $\mathcal{B}_s^+$, alors soit $\tau \in\mid B \rightarrow C \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, et soit y une variable du λ-calcul telle que $y : B \in \Gamma^-_A$. On a $y : B \vdash_{\mathcal{AF}2} y : B$, donc, d'après (ii), $y \in\mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, par suite $(\tau)y \in\mid C \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, et donc, d'après l'hypothèse d'induction, $\Gamma^-_A \vdash^\beta_{\mathcal{AF}_2} (\tau)y : C$. D'où il existe un λ-terme τ' tel que $(\tau)y \rightarrow_\beta \tau'$, et $\Gamma^-_{A,\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} \tau' : C$. Il en résulte que $(\tau)y$ est normalisable, et donc τ est normalisable. La forme normale de τ est x ou $(x)\tau_1...\tau_n$ $(n \geq 1)$ ou $\lambda x\theta$.

  <u>**Cas 1**</u> : Si $\tau \rightarrow_\beta x$, alors $(\tau)y \rightarrow_\beta (x)y$. Comme $\Gamma^-_{A,\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} \tau' : C$, on aura $\Gamma^-_{A,\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}_2} (x)y : C$. Or $Fv((x)y) \subseteq Fv(\tau')$, donc $\Gamma^-_{A,(x)y} \vdash_{\mathcal{AF}_2} (x)y : C$. D'où, d'après le corollaire 1.9, la variable x est déclarée d'un type F dans $\Gamma^-_{A,(x)y}$, avec : $F \leq G \rightarrow D, D \sim D', \Gamma^-_{A,(x)y} \vdash_{\mathcal{AF}_2} y : G, C = \forall\boldsymbol{\xi}D'$, et $\boldsymbol{\xi}$ n'est pas libre dans $\Gamma^-_{A,(x)y}$, où G est $\forall^+$ et D est $\forall^-$ qui ne commence pas par des quantificateurs. $y : B \in \Gamma^-_{A,(x)y}$, donc $B \leq B', B' \sim B''$, $G = \forall\boldsymbol{\xi}B''$, et $\boldsymbol{\xi}$ n'est pas libre dans $\Gamma^-_{A,(x)y}$.
  Supposons que $\boldsymbol{\xi}$ commence par une variable du second ordre X. Comme X n'est pas libre dans $\Gamma^-_{A,(x)y}$, alors X n'est pas libre dans F. Or $F \leq G \rightarrow D$, ce qui implique que X n'est pas libre dans D, donc non plus dans D'. Ce qui contredit le fait que C est propre. De plus $\boldsymbol{\xi}$ ne peut pas commencer par une variable du premier ordre, car C est $\forall^+$, d'où $C = D'$.
  Maintenant, comme G est $\forall^+$, on démontre de la même manière que $G = B''$.
  D'autre part on a $B = B'$, car sinon, i.e si $B < B'$, alors, comme $F \leq G \rightarrow D$ et $G \sim B'$, on obtient une contradiction avec la condition (*).
  Finalement on a $\Gamma^-_{A,x} \vdash_{\mathcal{AF}_2} x : F$, par conséquent $\Gamma^-_{A,x} \vdash_{\mathcal{AF}_2} x : G \rightarrow$

D, et donc $\Gamma^-_{A,x} \vdash_{\mathcal{AF}2} x : G \to D'$. D'où $\Gamma^-_{A,x} \vdash_{\mathcal{AF}2} x : B'' \to C$, donc $\Gamma^-_{A,x} \vdash_{\mathcal{AF}2} x : B \to C$, et par suite $\Gamma^-_A \vdash^{\beta}_{\mathcal{AF}2} \tau : S$.

<u>**Cas 2**</u> :

Si $\tau \to_\beta (x)\tau_1 ... \tau_n$, alors $(\tau)y \to_\beta (x)\tau_1...\tau_n y$. Comme $\Gamma^-_{A,\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}2} \tau' : C$ et $Fv((x)\tau_1...\tau_n y) \subseteq Fv(\tau')$, on déduit que $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n y} \vdash_{\mathcal{AF}2} (x)\tau_1...\tau_n y : C$. Donc, d'après le corollaire 1.9, x est déclarée d'un type F dans $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n y}$ avec : $F \leq C_1 \to D_1$, $D_1 \sim D'_1$, $D'_i = C_{i+1} \to D_{i+1}$, $D_{i+1} \sim D'_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $D'_n = G \to D_{n+1}$, $D_{n+1} \sim D'_{n+1}$, $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n y} \vdash_{\mathcal{AF}2} \tau_i : C_i$ $(1 \leq i \leq n)$, $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n y} \vdash_{\mathcal{AF}2} y : G$, $C = \forall \xi D'_{n+1}$, et ξ n'est pas libre dans $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n y}$.

$y : B \in \Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n y}$, donc $B \leq B', B' \sim B''$, $G = \forall \xi B''$, et ξ n'est pas libre dans $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n y}$.

ξ ne commence pas par une variable du premier ordre, car C est $\forall^+$.

Si ξ commence par une variable du second ordre X, et comme C est propre, cette variable doit être libre dans D'_{n+1}, donc elle est libre dans D_{n+1}, et donc dans D'_n aussi. Par conséquent X est libre dans tous les D_i (resp. D'_i) $(1 \leq i \leq n+1)$. Donc X est libre dans F, et par suite dans $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n y}$, ce qui est impossible. D'où $C = D'_{n+1}$.

De la même manière et comme G est $\forall^+$, on démontre que $G = B''$.

D'autre part, on remarque que $B = B'$, car sinon, i.e si $B < B'$, et comme on a montré que $F \leq C_1 \to (C_2 \to (... \to (C_n \to (G \to C)...)))$ et $B' \sim G$, alors on obtient une contradiction, d'après la condition (*).

Finalement on a $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n} \vdash_{\mathcal{AF}2} x : F$, donc $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n} \vdash_{\mathcal{AF}2} (x)\tau_1...\tau_n : G \to D_{n+1}$. Par conséquent $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n} \vdash_{\mathcal{AF}2} (x)\tau_1...\tau_n : G \to D'_{n+1}$, et alors $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n} \vdash_{\mathcal{AF}2} (x)\tau_1...\tau_n : G \to C$. D'où $\Gamma^-_{A,(x)\tau_1...\tau_n} \vdash_{\mathcal{AF}2} (x)\tau_1...\tau_n : B \to C$, et donc $\Gamma^-_A \vdash^{\beta}_{\mathcal{AF}2} \tau : S$

<u>**Cas 3**</u> : Si $\tau \to_\beta \lambda x\theta$, alors, comme l'ensemble Γ^-_A contient une infinité de déclarations pour chaque sous-type $\mathcal{B}^-_s$ de A, soit y une variable déclarée de type B dans Γ^-_A, n'appartenant pas à $Fv(\theta)$. Alors $(\tau)y \to_\beta (\lambda x\theta)y \to_\beta \theta[y/x]$. On a $\Gamma^-_{A,\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}2} \tau' : C$, donc $\Gamma^-_{A,\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}2} \theta[y/x] : C$, et donc, $\Gamma^-_{A,\theta[y/x]} \vdash_{\mathcal{AF}2} \theta[y/x] : C$, car $Fv(\theta[y/x]) \subseteq Fv(\tau')$. D'où $\Gamma^-_{A,\lambda y\theta[y/x]} \vdash_{\mathcal{AF}2} \lambda y\theta[y/x] : B \to C$. Comme y n'est pas libre dans θ, alors $\lambda y\theta[y/x] = \lambda x\theta$, par conséquent

$\Gamma_A^- \vdash_{\mathcal{AF}2} \lambda x\theta : S$ et $\Gamma_A^- \vdash^{\beta}_{\mathcal{AF}2} \tau : S$.

<u>*Preuve de* (ii)</u>

- Si S est atomique, alors on reprend la même preuve de (ii) du lemme 3.2.
- Si $S = B \to C$, où B est $\mathcal{B}_s^+$ et C est $\mathcal{B}_s^-$, supposons $\Gamma_A^- \vdash^{\beta}_{\mathcal{AF}2} \tau : B \to C$. Donc il existe un λ-terme τ' tel que $\tau \to_\beta \tau'$ et $\Gamma^-_{A,\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}2} \tau' : B \to C$. Si $u \in\mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$, alors d'après (i), $\Gamma_A^- \vdash^{\beta}_{\mathcal{AF}2} u : B$, donc il existe un λ-terme u' tel que $u \to_\beta u'$ et $\Gamma^-_{A,u'} \vdash_{\mathcal{AF}2} u' : B$. D'où $\Gamma^-_{A,(\tau')u'} \vdash_{\mathcal{AF}2} (\tau')u' : C$, et comme $(\tau)u \to_\beta (\tau')u'$, alors $\Gamma_A^- \vdash^{\beta}_{\mathcal{AF}2} (\tau)u : C$. D'où, d'après l'hypothèse d'induction, $(\tau)u \in\mid C \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$. Par conséquent $\tau \in\mid B \to C \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$.
- Si $S = \forall x B$, où B est $\mathcal{B}_s^-$, supposons que $\Gamma_A^- \vdash^{\beta}_{\mathcal{AF}2} \tau : \forall x B$, et soit $a \in\mid \mathcal{M} \mid$. Alors on a : $a = \overline{b}$, où b est un terme de L, et il existe un λ-terme τ' tel que $\tau \to_\beta \tau'$ et $\Gamma^-_{A,\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}2} \tau' : \forall x B$, par suite $\Gamma^-_{A,\tau'} \vdash_{\mathcal{AF}2} \tau' : B[b/x]$. Or, par définition, $B[b/x]$ est un sous-type $\mathcal{B}_s^-$ de A, donc d'après l'hypothèse d'induction, $\tau' \in\mid B[b/x] \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}} = \mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[x\leftarrow \overline{b}]} = \mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[x\leftarrow a]}$ (d'après le lemme 2.2). Par conséquent $\tau \in\mid B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}[x\leftarrow a]}$, et ce pour tout $a \in \mathcal{M}$; donc $\tau \in\mid \forall x B \mid_{\mathcal{M},\mathcal{I}}$. ♠

On peut déduire ainsi la preuve du théorème II.

Preuve du théorème II :

- La condition suffisante est une conséquence directe du théorème 2.1, et du fait que l'interprétation d'un type du système $\mathcal{AF}2$ dans un Λ_β-modèle M est une partie $\to_\beta$-saturée.
- La condition est nécessaire. En effet : Soient A un type $\mathcal{B}^+$ clos, et t un λ-terme tel que $t \in\mid A \mid_\beta$, alors $t \in\mid A \mid_{\mathcal{M}}$, pour tout Λ_β-modèle $\mathcal{M}$ associé à un ensemble Γ_A^- (comme décrit avant). De plus on peut supposer que Γ_A^- ne contient pas de déclarations pour les variables libres de t, i.e $\Gamma^-_{A,t} = \emptyset$. D'après le (i) du lemme 4.1, $\Gamma_A^- \vdash^{\beta}_{\mathcal{AF}2} t : A$, donc il existe un λ-terme t' tel que $t \to_\beta t'$ et $\Gamma^-_{A,t'} \vdash_{\mathcal{AF}2} t' : A$. Comme $Fv(t') \subseteq Fv(t)$, alors $\Gamma^-_{A,t'} = \emptyset$, d'où le résultat. ♠

D'après le théorème 3.1, on peut déduire le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2 : *Soient A un type $\mathcal{B}^+$ clos du système $\mathcal{AF}2$, et t un λ-terme, alors : $t \in\mid A \mid_\beta$ <u>ssi</u> il existe un λ-terme t' tel que $t \to_\beta t'$ et $\vdash_{\mathcal{AF}2_0} t' : A$.*

COROLLAIRE 4.3 : *Soient A un type $\mathcal{B}^+$ clos du système $\mathcal{AF}2$, et t un λ-terme.*

(i) *Si $t \in \mid A \mid_\beta$, alors t est normalisable et se réduit par β-réduction à un terme clos.*

(ii) *$\mid A \mid_\beta$ est stable par β-équivalence (i.e si $t \in \mid A \mid_\beta$ et $t \simeq_\beta t'$, alors $t' \in \mid A \mid_\beta$).*

Preuve: (i) Si $t \in \mid A \mid_\beta$, alors, d'après le théorème II, il existe un λ-terme t' tel que $t \to_\beta t'$ et $\vdash_{\mathcal{AF}2} t' : A$. Donc t se réduit par β-réduction à un terme normalisable clos, d'où le résultat.

(ii) Soit $t \in \mid A \mid_\beta$, avec $t \simeq_\beta t'$, alors il existe un λ-terme v tel que $t \to_\beta v$ et $t' \to_\beta v$. Or d'après le théorème II, il existe un λ-terme u tel que $t \to_\beta u$ et $\vdash_{\mathcal{AF}2} u : A$. On peut supposer que u est normal (car sinon $u \to_\beta w$, w normal et $\vdash_{\mathcal{AF}2} w : A$). D'où $v \to_\beta u$, et comme $\vdash_{\mathcal{AF}2} u : A$, alors d'après le théorème 2.1, $u \in \mid A \mid_\beta$. Mais $\mid A \mid_\beta$ est $\to_\beta$-saturée, il en résulte que $v \in \mid A \mid_\beta$ et par suite $t' \in \mid A \mid_\beta$. ♠

Remarques : Nous allons voir que les conditions qui définissent un type $\mathcal{B}^+$ sont toutes nécessaires pour avoir le théorème II.

(1) Considérons les types

$$A = \forall X\{(Y0 \to \forall y Xy) \to (Y0 \to X0)\}$$
$$B = \forall X\{\forall x(X0 \to (Xx \to X0)) \to (X0 \to \forall x(Xx \to X0))\}$$
$$C = \forall X\{(\forall x Xx \to X0) \to (X0 \to X0)\}$$

Il est clair que ces types sont propres, satisfont la condition (*), mais ils ne sont pas $\forall^+$ (dans A et B on a un quantificateur du premier ordre derrière une flèche, et dans C, le problème vient d'un quantificateur du premier ordre positif).

$\nvdash_{\mathcal{AF}2} I = \lambda x x : A$, car sinon on aura, $x : Y0 \to \forall y Xy \vdash_{\mathcal{AF}2} x : Y0 \to X0$. Ce qui est impossible, d'après le théorème 1.8.

Pourtant $I \in \mid A \mid_\beta$: Soit M un Λ_β-modèle quelconque, il faut montrer que $I \in \mid (Y0 \to \forall y Xy) \to (Y0 \to X0) \mid_{M,[X \leftarrow \Xi]}$ pour tout $\Xi \in P^{|M|}_{S_\beta(\Lambda)}$. Considérons donc un élément Ξ dans $P^{|M|}_{S_\beta(\Lambda)}$; si $u \in \mid (Y0 \to \forall y Xy) \mid_{M,[X \leftarrow \Xi]}$, et $v \in \mid Y0 \mid_M$. Alors on a : $(u)v \in \mid \forall y Xy \mid_{M,[X \leftarrow \Xi]}$, et comme $(I)uv \to_\beta (u)v$, on voit que $(I)uv \in \mid \forall y Xy \mid_{M,[X \leftarrow \Xi]}$, car $\mid \forall y Xy \mid_{M,[X \leftarrow \Xi]}$ est une partie $\to_\beta$-saturée de Λ. Par conséquent $(I)uv \in \mid X(0) \mid_{M,[X \leftarrow \Xi]} = \Xi(0_M)$.

De même pour B, il est clair que $\nvdash_{\mathcal{AF}2} I : B$. De plus, si M est un Λ_β-modèle et $\Xi \in P^{|M|}_{S_\beta(\Lambda)}$, alors en supposant que $u \in \mid \forall x(X0 \to (Xx \to X0)) \mid_{M,[X \leftarrow \Xi]}$, $v \in \mid X0 \mid_{M,[X \leftarrow \Xi]}$, et en prenant un élément quelconque

a de $\mid M \mid$, on voit que $u \in \mid (X0 \to (Xa \to X0)) \mid_{M,[X \leftarrow \Xi]}$, et donc $(u)v \in \mid Xa \to X0 \mid_{M,[X \leftarrow \Xi]}$, d'où $(I)uv \in \mid Xa \to X0 \mid_{M,[X \leftarrow \Xi]}$. Par conséquent $I \in \mid B \mid_M$.

On reprend la même démonstration pour C.

(2) Soit

$$C' = \forall X\{(\forall Y X0 \to X0) \to (X0 \to X0)\}$$

C' satisfait la condition (*), et vérifie toutes les propriétés qui figurent dans la définition d'un type $\forall^+$, sauf le fait qu'il n'est pas propre. On peut démontrer comme dans (1), que $I \in \mid C' \mid_\beta$, et $\not\vdash_{\mathcal{AF}2} I : C'$.

(3) Reprenons l'exemple du type $D = \forall X\{\forall Y(Y \to X) \to X\}$ décrit dans le paragraphe 3. D est un type propre qui satisfait la condition (*), mais il n'est pas ni $\forall^+$ ni $\forall_2^+$. Par une démonstration analogue à celle qui est déjà faite, on voit que le λ-terme $t = \lambda x(x)(\delta)\delta \in \mid D \mid_\beta$, et t n'est pas normalisable.

De même $t' = \lambda x(x)y \in \mid D \mid_\beta$, et t' est normal et non clos.

Considérons enfin les types

$$\begin{aligned}
E &= \forall X\{\forall x(Xx \to X0) \to (\forall x Xx \to X0)\}\\
F &= \forall X\{\forall x(X0 \to (Xx \to X0)) \to (X0 \to (\forall x Xx \to X0))\}\\
K &= \forall X \forall Y\{\forall y\{[\forall x(X(x,0) \to X(0,0))\\
&\qquad\qquad \to (\forall x X(x,y) \to X(0,0))] \to Y\} \to Y\}
\end{aligned}$$

E et F sont $\forall^+$, mais ils ne satisfont pas la condition (*). En effet :

Pour E, on a : $\forall x(Xx \to X0) \le (Xx \to X0)$, et $\forall x Xx < Xx$.

Et pour F, on a : $\forall x(X0 \to (Xx \to X0)) \le X0 \to (Xx \to X0)$, et $\forall x Xx < Xx$.

De la même manière, on démontre que $I \in \mid E \mid_\beta$ (resp. $I \in \mid F \mid_\beta$), et que $\not\vdash_{\mathcal{AF}2} I : E$ (resp. $\not\vdash_{\mathcal{AF}2} I : F$).

K n'est pas $\mathcal{B}^+$ pour des raisons plus compliquées. En effet : $\forall x(X(x,0) \to X(0,0)) \le X(x,0) \to X(0,0)$ et $\forall x X(x,y)[0/y] < X(x,0)$.

On démontre facilement que $\lambda x(x)I \in \mid K \mid_\beta$ et $\not\vdash_{\mathcal{AF}2} \lambda x(x)I : K$. ♠

Il est clair qu'un type du système $\mathcal{F}$ est $\mathcal{B}^+$ ssi il est $\forall_2^+$ et propre. D'où le résultat suivant:

THÉORÈME 4.4 : *Soient A un type $\forall_2^+$, clos et propre du système $\mathcal{F}$, et t un λ-terme, alors: $t \in\mid A \mid_\beta$ <u>ssi</u> il existe un λ-terme t' tel que $t \to_\beta t'$ et $\vdash_{\mathcal{F}} t' : A$.*

REMERCIEMENTS

Nous remercions R. David et C. Raffalli pour leurs remarques et leurs suggestions.

RÉFÉRENCES

1. H. BARENDREGT, *The Lambda Calculus*, Its Syntax and Semantics, North Holland, 1984.
2. J.-Y. GIRARD, Y. LAFONT et P. TAYLOR, *Proofs and Types*, Cambridge University Press, 1986.
3. J.-P. JOUANNAUD et C. KIRCHNER, *Solving Equations in Abstract Algebras : A Rule-Based Survey of Unification*, Technical Report, LRI, CNRS UA 410 : AL Khowarizmi, mars 1990.
4. J.-L. KRIVINE, *Lambda-calcul, types et modèles*, Masson, Paris 1990.
5. J.-L. KRIVINE, Classical Logic, Storage Operators and Second Order Lambda-Calculs, *Annals of Pure and Applied Logic*, 1994, *68*, p. 53-78.
6. J.-L. KRIVINE, Opérateurs de mise en mémoire et traduction de Gődel, *Archive for Mathematical Logic*, 1990, *30*, p. 241-267.
7. R. LABIB-SAMI, *Typer avec (ou sans) types auxilières*, Manuscrit, 1986.
8. K. NOUR, Opérateurs de mise en mémoire en lambda-calcul pur et typé, Thèse de doctorat, Université de Savoie, 1993.
9. K. NOUR, *Opérateurs de mise en mémoire et types $\forall$-positifs*, *Theoretical Informatics and Applications*, 1996, *30*, p. 261-293.
10. C. RAFFALLI, A Semantical Storage Operator Theorem for All Types, *Annal. Pure Applied Logic* (to appear).